Gunnar Geisse

Spektralharmonik

Klangphänomene und ihre Wahrnehmung
als kompositorische Quelle und
Weg zur Tonhöhengenese

(Auszug)

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Manuskript begann ich in erster Linie zu schreiben, nachdem ich eine Einladung des Münchner Gitarren Instituts (MGI) bekam, meine musikalische Arbeit vorzustellen, und um mir diesbezüglich einen Überblick zu verschaffen über das in meinen Kompositionen verwendete ***tonale*** *Material und Handwerkszeug, das sich im Laufe der Zeit entwickelt und angesammelt hatte - siehe Kapitel III, IV, V und die Tabellen im Anhang - es somit gleichermaßen für folgende Arbeiten abrufbar zur Hand zu haben, aber nach Beginn des Schreibens in zweiter Linie dann schnell auch, um die neuen Zusammenhänge die entdeckt wurden umfassender verstehen zu lernen.*

Ein Hauptanliegen dabei waren einerseits die mathematische Herleitung und physikalische Darstellung von Kombinationstönen mit Hilfe von Gliedern einer Potenzreihe und andererseits die Entwicklung einer Formel zur Berechnung von Kombinationstönen komplexer Teiltöne aus der Partialtonmatrix und deren centgenaue Abweichung von ihrem temperierten Pendant.

Kapitel I und II beschränken sich im Wesentlichen auf eine Sammlung und Nacherzählung akustischer Phänomene und ihrer physikalischen Beschreibung, wie sie ebenso in anderen Büchern - siehe Literaturhinweise - zu finden sind. Auch in den übrigen Kapiteln finden sich Passagen, die aus den in den Quellenangaben aufgelisteten Büchern oder Online-Artikeln stammen. Meine Arbeit baut selbstverständlich auf diesen Erkenntnissen auf; ich möchte mich an dieser Stelle ausdrücklich herzlichst bei allen Autoren für ihre so wertvolle Arbeit bedanken!
Ein besonderer Dank geht dabei an Peter Neubäcker für seinen Beitrag auf dem Gebiet der Harmonik. Beim Lernen und (Nach-) Rechnen stand mir vor allem mein Bruder Hellwig tatkräftig zur Seite, der das ein oder andere Mal Licht ins Dunkel brachte.

Ein Umstand, der mir besonders angenehm auffiel und mich immer wieder glücklich stimmt, ist die Tatsache, dass frühere, eher unbedeutende, ja sogar unangenehme Sachverhalte, besonders solche der Physik oder Mathematik im Lichte der Musik wie selbstverständlich ihren Sinn bekommen und es anscheinend anhaltend immer wieder Gebiete unterschiedlichster Disziplinen gibt, die mit und durch die Musik erfahrbar sind und zu entdecken bleiben.

Die Arbeit ist meinem verstorbenen Vater gewidmet, der durch seine Liebe und Begeisterung für die Musik half, diese in mir zum Leben zu erwecken.

In Dankbarkeit
Gunnar Geisse, München 2006

IV

Spektrale Tonhöhengenese 2

Phänomen

Erklingt ein Doppelgriff eines Streichinstruments, spielen zwei Flöten oder Fagotte zusammen, kommen in elektronischer Musik gleichzeitig mehrere sinusartige Frequenzen zur Anwendung, so können unter bestimmten Bedingungen zusätzlich Töne gehört werden, die tatsächlich nicht gespielt, im produzierten Signal nicht vorhanden sind.

Die Kombinationstöne

So wie die Untertöne bei einem natürlich erzeugten Ton nicht im Schallsignal enthalten sind, so tauchen auch die meisten Kombinationstöne im Linienspektrum nicht auf, denn Schallwellen überlagern sich, ausser bei extrem großen Lautstärken linear. Dennoch sind sie unter bestimmten Bedingungen, vor allem bei Mindestschallintensitäten hörbar. Das deutet auf eine Nichtlinearität des Ohres hin, denn wäre das Hörsystem vollkommen linear, so enthielte es naturgemäß lediglich dieselben Frequenzkomponenten wie das ursprüngliche Signal; Eingangs- und Ausgangssignal nämlich haben bei linearen Frequenzsystemen gleiche Linienspektren, eventuell mit abweichenden Amplituden, aber sie enthalten eben keine neuen Frequenzen. Und tatsächlich entstehen diese Töne - bis auf jene, die wegen einer Nichtlinearität des Instruments direkt im Klangkörper gebildet werden und dann auch physikalisch im Luftraum vorhanden sind (das Phänomen tritt übrigens auch bei Übersteuerung von elektroakustischen Verstärkern auf!) - auf Grund von nichtlinearen Verzerrungen des akustischen Signals in der Schnecke (*Cochlea*) des Innenohrs. Im gegebenen Fall sind dort auf der Basilarmembran Bereiche aktiviert, die den Frequenzen der Kombinationstöne entsprechen. Beim gleichzeitigen Erklingen von zwei oder mehr Tonhöhen, v.a. in hoher Frequenz und großer Lautstärke, kommt es so zur Wahrnehmung von Kombinationstönen.

Daneben existiert ein anderes, ebenfalls im Innenohr entstehendes nichtlineares Verzerrungsphänomen, bei dem bei einem sehr lauten *einzelnen* Ton zusätzlich Frequenzen zu hören sind, die mit einem ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz schwingen und deshalb auch gemäß den Harmonischen *aurale Harmonische* oder *Ohr-Obertöne* genannt werden.

Man kann nun mathematisch zeigen, dass ein verzerrendes, nichtlineares System zusätzliche Schwingungen zu zwei harmonischen Eingangsschwingungen unterschiedlicher Frequenz erzeugt: für schmalbandige Signale sind diese angeregten Schwingungen proportional zu einer *Potenzreihe* des Eingangssignals.[1] Allerdings werden bei natürlichen, breitbandigen Signalen die meisten Verzerrungsprodukte von den stärkeren Komponenten des Schalleingangsignals übertönend verdeckt, man sagt *maskiert*, so dass sie nicht mehr hörbar sind.

Bei den Kombinationstönen unterscheidet man grundsätzlich zwischen Differenz- und Summationstönen, sowie Kombinationstönen verschiedener Ordnungen, die als Folge von Kombinationstönen von Kombinationstönen entstehen.

Für die Ordnungen existiert folgende Kennzeichnung: Ausgangstonhöhen sind *Primärtöne*, Kombinationstöne 1. Ordnung *Sekundärtöne*, 2. Ordnung *Tertiärtöne*, 3. Ordnung *Quartiärtöne*, usw. Die Anzahl der wahrnehmbaren Kombinationstöne steigt mit zunehmendem Pegel der Primärtöne. Es sei erwähnt, dass Kombinationstöne nicht nur aus dem Zusammenklang von Primärtönen hervorgehen, sondern sich auch, wie z.B. beim einzelnen komplexen Ton, zwischen Primär- und Obertönen und zwischen Obertönen untereinander bilden.

Für die Berechnung von Kombinationstönen f_k von Tonpaaren der Frequenz f_1 und f_2 existiert folgende einfache Formel: $f_k = | n \cdot f_1 \pm m \cdot f_2 |$ für $n, m \in \mathbb{N}$. (Zu Frequenzbeträgen s.u.)

Am bedeutensten, weil auch am lautesten, sind der Differenzton 1. Ordnung, der so genannte *quadratische* Differenzton $f_2 - f_1$[2] und noch dominanter, der selbst bei niedrigeren Pegeln durchsetzungsfähige *kubische* Differenzton, ein Kombinationston 2. Ordnung der Form $2 \cdot f_1 - f_2$, für $f_1 < f_2$. Um Verwechselungen zu vermeiden, schreibt man auch gerne für den tieferen Ton $f_1 = t$ und für den höheren $f_2 = h$, also: $h - t$ und $2t - h$.

Wichtig sind ferner ein zweiter kubischer $2h - t$, der Summationston $h + t$ (neben $h - t$ der zweite Sekundärton), die Quartiärtöne $3t - h$ und $3h - t$, sowie $3h - 2t$.

Anhand eines (Ton-) Beispiels soll nun das Wahrnehmungsphänomen der Kombinationstöne erläutert werden.

Kombinationstöne lassen sich gut hören, wenn zwei Frequenzen im Stereobild verwendet werden, eine konstante und eine, die mit der Zeit moduliert, so dass sich auch die auftretenden Kombinationstöne kontinuierlich verändern. Die Konstante sei bei f_1 = 400 Hz und die Variable f_2 fange bei 200 Hz an und soll dann bis 800 Hz steigen. Es hilft, wenn der 400 Hz Ton in der dB-Zahl abgesenkt ist und beide Dreieckschwingungen sind.

Folgendes wird primär wahrgenommen: Im Bereich von ungefähr f_2 = 250 Hz - 350 Hz ist ein zusätzlicher ansteigender Ton der Frequenz $f = 2f_2{-}f_1$ zu hören. In unmittelbarer Nähe von $f_2 \approx$ 400 Hz = f_1 tauchen Schwebungen auf und im Bereich von ca. f_2 = 450 Hz - 600 Hz kann sowohl ein aus der Tiefe ansteigender ($f = f_2{-}f_1$), als auch ein absteigender Ton der Frequenz $f = 2f_1{-}f_2$ wahrgenommen werden. Bei genauerem Hinhören sind zusätzlich noch eine Menge anderer Frequenzen schon ab Beginn erkennbar, z.B. auch der vorausgehende Verlauf von $2f_2{-}f_1$, usw.

Hier eine kleine punktuelle Übersicht der drei erwähnten Kombinationstöne:

f_1	f_2	$f_{k_1} = 2f_2{-}f_1$	$f_{k_2} = \lvert f_2{-}f_1 \rvert$ *	$f_{k_3} = 2f_1{-}f_2$
konstant	*variabel*			
400 Hz	200 Hz	0 Hz	200 Hz	600 Hz
↓	300 Hz	200 Hz	100 Hz	500 Hz
	400 Hz	400 Hz	0 Hz	400 Hz
	500 Hz	600 Hz	100 Hz	300 Hz
	600 Hz	800 Hz	200 Hz	200 Hz
	700 Hz	1000 Hz	300 Hz	100 Hz
	800 Hz	1200 Hz	400 Hz	0 Hz

* Die zwei vertikalen Striche sind das Symbol für den Betrag einer Zahl. Man erhält ihn durch Wegnahme ihres Vorzeichens.
Alle **negativen** Frequenzen, die in Kombinationstonformeln auftauchen werden durch ihren **Betrag** in positive umgewandelt. Hier gilt: $h{-}t = \lvert t{-}h \rvert$.
Ausgehend von der Kreisfrequenz $2\pi \cdot f$ lassen sich 'negative Frequenzen' beschreiben mit *sin* $(-f \cdot 2\pi t)$ bzw. *cos* $(-f \cdot 2\pi t)$.
Es ist *sin* $(-f \cdot 2\pi t)$ = *sin* $(-\omega t)$ = *sin* $(-\alpha)$ und *cos* $(-f \cdot 2\pi t)$ = *cos* $(-\omega t)$ = *cos* $(-\alpha)$.
Für Winkelgrössen **im** Uhrzeigersinn *cos* $(-\alpha)$ und *sin* $(-\alpha)$ gilt aber: *cos* $(-\alpha)$ = *cos* α, heißt, dass die Kurve der Kosinusfunktion axialsymmetrisch zur y-Achse ist und weiterhin *sin* $(-\alpha)$ = –*sin* α, heißt, dass die Kurve der Sinusfunktion punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist. Das Minuszeichen vorm Sinus stellt lediglich eine 180°-Phasenverschiebung dar. Diese Beziehungen kann man sich an der graphischen Darstellung beider Funktionen gut veranschaulichen. Die Kurven verlaufen dann als Fortsetzung auch im II. und III. Quadranten des Koordinaten-systems.
Also: *sin* $(-f \cdot 2\pi t)$ = –*sin* $(2\pi \cdot ft)$ und *cos* $(-f \cdot 2\pi t)$ = *cos* $(2\pi \cdot ft)$, d.h. aber, dass letztendlich nur der Frequenzbetrag relevant ist.
Zu Frequenzbeträgen und Ordnungszahlen von Kombinationstönen siehe auch Anhang Tafel 4 'reine Quint' und folgende.

⇒ Klangbeispiel ❻
Beispiel für die Wahrnehmung von Kombinationstönen mit Hilfe zweier Frequenzen
f_1 = 400 Hz & f_2 = 200 - 800 Hz (ProTools Session)

Ein anderes Beispiel, bei dem der Schwerpunkt mehr auf die Darstellung der Tonhöhen der Kombinationstöne gelegt wird, geht von der Normtonhöhe C mit einer Frequenz von 64 Hz aus und einem konstanten c^1 = 256 Hz.

Bewegt sich die variable Frequenz diesmal von c^1 = 256 Hz eine Oktave nach oben bis c^2 = 512 Hz, so kann man bei genügender Lautstärke einen ebenfalls aus der Tiefe aufsteigenden Ton wahrnehmen, den quadratischen Differenzton *h−t*, der schließlich in die Konstante c^1 mündet, wenn die Variable c^2 erreicht. Auf dem Weg dorthin bilden sich u.a. folgende "Dreiklänge":[3]

	f_{variabel}	$f_{\text{h-t}}$
$f_{\text{konstant}} = c^1$ 256 Hz	cis^1 temperiert	$_3H^{+14}$
↓	d^1 temperiert	$_1C^{-36}$
	es^1 temperiert	$_1G^{+18}$
	e^1 rein, Verhältnis 5:4	C 64 Hz
	e^1 temperiert	Cis^{-33}
	f^1 temperiert	F^{+6}
	g^1 temperiert	c^{-6}
	g^1 rein, Verhältnis 6:4	c 128 Hz
	b^1 rein, Verhältnis 7:4	^{+2}g 192 Hz
	b^1 temperiert	^{-26}as
	c^2 temperiert	c^1 256 Hz

Der Tertiärton $2t-h$, *der* kubische Differenzton, bildet sich nun aus $2 \cdot f_{\text{konstant}} - f_{\text{variabel}}$, kann aber auch dargestellt werden als Kombinationston eines Kombinationstons, deswegen auch Kombinationston 2. Ordnung genannt, nämlich aus dem Zusammenklang von f_{konstant} und dem Kombinationston 1. Ordnung $f_{\text{h-t}}$ der Form $f_{\text{konstant}} - f_{\text{h-t}} = f_{\text{2t-h}}$:*

	f_{variabel}	$f_{\text{2t-h}} = f_{\text{konstant}} - f_{\text{h-t}}$
$f_{\text{konstant}} = c^1$ 256 Hz	cis^1 temperiert	^{-6}h
↓	d^1 temperiert	^{-26}b
	es^1 temperiert	^{+37}as
	e^1 rein, Verhältnis 5:4	^{+2}g 192 Hz
	e^1 temperiert	^{-21}g
	f^1 temperiert	^{-6}f
	g^1 temperiert	c^{+6}
	g^1 rein, Verhältnis 6:4	c 128 Hz
	b^1 rein, Verhältnis 7:4	C 64 Hz
	b^1 temperiert	$_{1}B\flat^{-36}$
	h^1 temperiert	$_{2}B\flat^{+14}$

* Das erklärt sich folgendermaßen:

$(f_{\text{konstant}} = f_t)$

$$
\begin{aligned}
f_{\text{2t-h}} &= f_t - f_{\text{h-t}} \\
&= f_t - (f_h - f_t) \\
&= f_t - f_h + f_t \\
&= 2f_t - f_h
\end{aligned}
$$

Diese so entstandenen Kombinationstöne 2. Ordnung bilden mit den schon vorhandenen wieder neue Kombinationstöne höherer Ordnung usw., theoretisch wie Obertöne ins Unendliche fortschreitend - ganz gemäß der unten beschriebenen Potenzreihe.

Nachdem nun Partialtonmatrizen und Kombinationstöne für die Komposition erschlossen sind und frei zur Verfügung stehen, ist es jetzt möglich diese beiden für die Bildung von harmonisch *spektralen Gestalten* zu nutzen, und zwar auf folgende Weise:
Musikalische Intervalle tauchen auch in der Teiltonreihe in der Form a/b und komplexer in der Teiltonmatrix in der Form $p_1/p_2 = (a_1/b_1) \div (a_2/b_2)$ auf.
Sie besitzen aber keine temperierte Einheitsgröße wie in der äquidistanten, chromatischen Halbton-Skala (oder einer feineren Unterteilung), sondern sind mikrotonal eingefärbt, ja, haben vielleicht eine ganz eigene Intervallqualität.
Das gleiche Intervall liegt dort in den unterschiedlichsten Größenverhältnissen vor. Um sie zu vergleichen und für die Harmoniebildung zu nutzen, kann man vorhandene Intervalle transponieren. Dazu fährt man mit der "Intervallmaske" betreffendes Gebiet der Reihe oder Matrix ab und transponiert das Intervall der Proportion anschließend auf gleiche Tonhöhen-Namen, entsprechende Centabweichungen beibehaltend.
Eine kleine Sext z.B. taucht dann innnerhalb der Teilton*reihe* in den Verhältnissen 5/8, 7/11, 8/13, 9/14, 11/18, usw. auf, mit Centdifferenzen zur temperierten kl. Sexte von +14, –18, +41, –35 und +53 Cent (ist das noch eine kleine Sext?). *
Am Beispiel von c^1–as^1 und dem ihnen zu Grunde liegenden 1. Partialton:

Prop.	Grundton	Intervall	Cent
5/8	($_1$A♭)	$^{-14}c^1$ / $^{\pm 0}as^1$	♭6^{+14}
7/11	($_1$D)	$^{-31}c^1$ / $^{-49}as^1$	♭6^{-18}
8/13	($_1$C)	$^{\pm 0}c^1$ / $^{+41}as^1$	♭6^{+41}
9/14	($_2$B♭)	$^{+4}c^1$ / $^{-31}as^1$	♭6^{-35}
11/18	($_2$F♯)	$^{-49}c^1$ / $^{+4}as^1$	♭6^{+53} = 6^{-47} *

usw.

All diese verschieden großen Intervalle mit gleichem Intervallnamen produzieren aber unterschiedliche Kombinationstöne, die - so wage ich hier kurz ausholend nach meiner bisherigen Erfahrung zu behaupten - dem vorhandenen Intervall hinzugefügt, Harmonien entstehen lassen, die zu mehrdeutigen, weil Erinnerung nur wachrufenden, aber nicht unbedingt bestätigenden Tonhöhenempfindungen führen, eine, sagen wir mal, *Realitätsreibung der Wahrnehmung* erzeugen können, zumal, wenn sie ohne Einschwingvorgang, so dass auch der erzeugende Klangkörper nur zu erahnen ist, elektronisch geschnitten und zusammengesetzt wurden, diese Harmonien ebenso einerseits Funktionsharmonik im weitesten Sinne nicht bedienen, aber andererseits kohärent Tonales auch nicht negieren, eine vielleicht andere Art von Harmonik - **spektraler Harmonik** - hervorzubringen im Stande sind.

* *Wahrnehmungspsychologische Aspekte, die Aufschluss gäben innerhalb welcher Grenzen und unter welchen Bedingungen ein ausgezeichnetes Intervall als ein solches auch gehört wird (Intervall-Erkennungsgrenzen), sind hier nicht berücksichtigt worden; in der Tabelle im Anhang sind Intervallgrössen anhand ihrer Centwerte nach rein numerischen Gesichtspunkten ihren Klassen zugeordnet!*

Hier nun noch einmal obige Intervallgrößen mit Hinzuziehung einiger Kombinationstöne.[4]

Anstatt aber zur Ermittlung der Kombinationstöne nun die Frequenzen der Teiltöne miteinander zu verrechnen, lassen sich auch bequemer ihre Ordnungszahlen dafür heranziehen! Dazu werden die Ordnungszahlen der Proportion des Ausgangsintervalls in die entsprechende Kombinationstonformel eingesetzt.

	<u>Proportion/</u> <u>Grundton/</u> <u>Intervall</u>				
	5/8 $({}_1A^{\flat})$ $^{-14}c^1 / {}^{\pm0}as^1$	7/11 $({}_1D)$ $^{-31}c^1 / {}^{-49}as^1$	8/13 $({}_1C)$ $^{\pm0}c^1 / {}^{+41}as^1$	9/14 $({}_2B^{\flat})$ $^{+4}c^1 / {}^{-31}as^1$	11/18 $({}_2F^{\sharp})$ $^{-49}c^1 / {}^{+4}as^1$
<u>*h–t*</u>	[3] ^{+2}es	[4] $^{\pm0}d$	[5] ^{-14}e	[5] ^{-14}d	[7] ^{-31}e
<u>*h+t*</u>	[13] $^{+41}e^2$	[18] $^{+4}e^2$	[21] $^{-29}f^2$	[23] $^{+28}e^2$	[29] $^{+30}e^2$
<u>*2t–h*</u>	[2] $^{\pm0}A^{\flat}$	[3] ^{+2}A	[3] ^{+2}G	[4] $^{\pm0}B^{\flat}$	[4] $^{\pm0}F^{\sharp}$
<u>*2h–t*</u>	[11] $^{-49}d^2$	[15] $^{-12}cis^2$	[18] $^{+4}d^2$	[19] $^{-2}des^2$	[25] $^{-27}d^2$
<u>*3t–h*</u>	[7] $^{-31}ges^1$	[10] $^{-14}fis^1$	[11] $^{-49}fis^1$	[13] $^{+41}ges^1$	[15] $^{-12}f^1$
<u>*3h–t*</u>	[19] $^{-2}h^2$	[26] $^{+41}b^2$	[31] $^{+45}h^2$	[33] $^{-47}h^2$	[43] $^{+12}h^2$
<u>*3h–2t*</u>	[14] $^{-31}ges^2$	[19] $^{-2}f^2$	[23] $^{+28}fis^2$	[24] $^{+2}f^2$	[32] $^{\pm0}fis^2$

usw.

Des Weiteren bieten sich auch Intervalle komplexer Partialtonverhältnisse der Form p_1 / p_2 [= $(a_1 / b_1) \div (a_2 / b_2)$] zur Kombinationstonbildung an.

Zum Beispiel eine kleine Sext mit einer Abweichung von +18 Cent (auf gleichem Ausgangs-Intervall):[5]

<u>Proportion/</u>
<u>Grundton/</u>
<u>Intervall</u>

(8 / 7) ÷ (11 / 6)
b = Grundton
$^{+31}$c^{1} / $^{+49}$as^{1}

h–t	[29 / 42] $^{-41}$e
h+t	[125 / 42] $^{-12}$f^{2}
2t–h	[19 / 42] $^{+27}$A$^{\flat}$
2h–t	[53 / 21] $^{+3}$d^{2}
3t–h	[67 / 42] $^{+9}$fis^{1}
3h–t	[61 / 14] $^{+48}$h^{2}
3h–2t	[45 / 14] $^{+21}$fis^{2}

usw.

Unter Tafel 4 im Anhang ist eine innerhalb einer Oktav nach Intervalltyp geordnete Auflistung von Teiltonproportionen gemäß ihrem Vorkommen in der Partialton<u>reihe</u> mit ihren voneinander differierenden Kombinationstönen einzusehen. Begrenzung der intervallbildenden Tonhöhen bis zum 32. Teilton. Halbtongrenzen bilden die rein numerischen Centwerte 51 – 149.

Bemerkung:
Wir haben hier ausschließlich Zweiklänge untersucht! Bei **Mehrklängen** nimmt die Anzahl der auftretenden Kombinationstöne erheblich zu, da hier jede Tonhöhe mit jeder anderen wechselwirkt.

[1] Das soll etwas ausführlicher erläutert und dazu ein wenig weiter ausgeholt werden:

Eine Funktion ist eine Abbildung, bei der jedem Element einer Definitionsmenge $x \in D$ ein Element aus einer Bildmenge $y \in B$ zugeordnet wird. Man schreibt dafür $f: x \mapsto y$ und sagt "x wird auf y abgebildet" oder "x wird y zugeordnet". $D(f)$ ist die *Definitionsmenge* und $B(f)$ die *Bildmenge* der Funktion. $f: D(f) \to B(f)$ meint, die Definitionsmenge wird auf die Bildmenge abgebildet; $f: x \mapsto f(x)$. $f(x)$ heißt *Funktionsterm,* also x wird auf den Funktionsterm $f(x)$ abgebildet. Einsetzen eines Wertes $\overline{x} \in D(f)$ liefert sein Bild, mithin den *Funktionswert* $f(\overline{x})$. Die Darstellung einer Funktion im Koordinatensystem nennt man ihren Graph (*Funktionsgraph*). Der Graph besteht also aus allen Punkten (x, y) mit $x \in D(f)$ und $y = f(x)$. $y = f(x)$ heißt *Funktionsgleichung*.

Für eine *lineare* Funktion gilt: $f(x) = ax$. Der Koeffizient a ist eine feste Größe/Zahl, die als Faktor bei der Variablen x steht. Der Graph zeigt eine Gerade.

Für eine *affine* Funktion der Form $f(x) = ax+b$ zeigt der Graph ebenfalls eine Gerade, deswegen wird diese Funktion zuweilen auch linear genannt.

Für viele *nichtlineare* Funktionen existiert die Möglichkeit einer Reihendarstellung. Die Reihenentwicklung ermöglicht die Berechnung einer nicht direkt mit elementaren Operationen (+ – × ÷) darstellbaren mathematischen Funktion durch eine im Allgemeinen unendliche Summe von elementaren Ausdrücken, deren Berechnung eine Näherung der exakten Funktion darstellt, wenn nur endlich viele Terme berücksichtigt werden. In diesem Fall, wenn die Reihe abbricht, spricht man von einem Polynom.

Für die *Potenzreihe* gilt: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...$

Die Nichtlinearität beginnt mit dem quadratischen Glied dieser Summe (dessen Graph eine Parabel zeigt) und liefert die Kombinationstöne. Die dritte Potenz führt zu dem relativ lauten *kubischen* Differenzton.

Wie?

Anhand des quadratischen Glieds x^2 (ohne seinen Koeffizienten a_2) soll hier die Entstehung der Differenz- und Summationstöne von der Summe zweier gleichzeitig klingender Sinustöne $sin(\omega_1 t)$ und $sin(\omega_2 t)$ gezeigt werden:

Allgemein gilt bei Multiplikation von zwei Sinusfunktionen $sin(\alpha) \cdot sin(\beta) =$

$\frac{1}{2}\,[cos(\alpha-\beta) - cos(\alpha+\beta)]$.

Für das Produkt zweier Sinusschwingungen oder Frequenzen gilt dann: $sin(\omega_1 t) \cdot sin(\omega_2 t) =$

$\frac{1}{2}\,[cos(\omega_1 t - \omega_2 t) - cos(\omega_1 t + \omega_2 t)] = \frac{1}{2}\,[cos((\omega_1 - \omega_2) \cdot t) - cos((\omega_1 + \omega_2) \cdot t)]$.

Und für den speziellen Fall zweier gleicher Frequenzen: $sin(\omega_1 t) \cdot sin(\omega_1 t) =$

$sin^2(\omega_1 t) = \frac{1}{2}\,[cos(\omega_1 t - \omega_1 t) - cos(\omega_1 t + \omega_1 t)] = \frac{1}{2}\,[cos\,0 - cos(2\omega_1 t)] =$

$\frac{1}{2}\,[1 - cos(2\omega_1 t)] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,cos(2\omega_1 t)$.

Für die zweite Potenz eines Binoms (eines zweigliedrigen mathematischen Terms) der Form $a+b$, gilt die binomische Formel: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.

Für das quadratische Glied x^2 der Potenzreihe zweier Frequenzen $[sin(\omega_1 t)+sin(\omega_2 t)]^2$ muss man nur noch einsetzen: $[sin(\omega_1 t)+sin(\omega_2 t)]^2 =$

$sin^2(\omega_1 t) + sin^2(\omega_2 t) + 2 \cdot \frac{1}{2}\,[cos(\omega_1 t - \omega_2 t) - cos(\omega_1 t + \omega_2 t)] =$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,cos(2\omega_1 t) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,cos(2\omega_2 t) + cos(\omega_1 t - \omega_2 t) - cos(\omega_1 t + \omega_2 t) =$

$1 - \frac{1}{2}\,cos(2\omega_1 t) - \frac{1}{2}\,cos(2\omega_2 t) - cos(\omega_1 t + \omega_2 t) + cos(\omega_1 t - \omega_2 t)$.

Da aber $\omega t = 2\pi \cdot ft$ ist und $2\omega t = 4\pi \cdot ft = 2\pi \cdot 2ft$ ist, ergibt sich aus letztem Term:

$[sin(\omega_1 t)+sin(\omega_2 t)]^2 =$

$1 - \frac{1}{2}\,cos(2\pi \cdot 2f_1 t) - \frac{1}{2}\,cos(2\pi \cdot 2f_2 t) - cos(2\pi \cdot f_1 t + 2\pi \cdot f_2 t) + cos(2\pi \cdot f_1 t - 2\pi \cdot f_2 t) =$

$1 - \frac{1}{2}\,cos(2\pi t \cdot 2f_1) - \frac{1}{2}\,cos(2\pi t \cdot 2f_2) - cos[2\pi t \cdot (f_1+f_2)] + cos[2\pi t \cdot (f_1-f_2)]$.

Es ist gut zu sehen, wie der Differenzton f_1-f_2 und der Summationston f_1+f_2 gebildet werden. Daneben tritt aber zusätzlich noch eine Verstärkung des jeweils 1. Obertons von erster ($2f_1$) und zweiter Frequenz ($2f_2$) auf.

Außerdem steht der Faktor ½ für ½-Amplituden und die ± Zeichen zwischen den Termgliedern für 180°-Phasenverschiebungen.

Übersichtshalber ergänzend hier nun noch die kubischen Differenztöne zweier Frequenzen und das x^3–Glied der Potenzreihe.
Die dazugehörige binomische Formel: $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

$\sin^3(\omega t) = ¼\,[3 \cdot \sin(\omega t) - \sin(3\omega t)] = ¾ \sin(\omega t) - ¼ \sin(3\omega t) = ¾ \sin(2\pi t \cdot f) - ¼ \sin(2\pi t \cdot 3f)$

$[\sin(\omega_1 t)+\sin(\omega_2 t)]^3 =$

$2¼ \sin(2\pi t \cdot f_1) + 2¼ \sin(2\pi t \cdot f_2) - ¼ \sin(2\pi t \cdot 3f_1) - ¼ \sin(2\pi t \cdot 3f_2) -$
$¾ \sin[2\pi t \cdot (2f_1+f_2)] - ¾ \sin[2\pi t \cdot (2f_2+f_1)] + ¾ \sin[2\pi t \cdot (2f_1-f_2) + ¾ \sin[2\pi t \cdot (2f_2-f_1)]$.

Man sieht welche Komplexität die Nichtlinearitäten schon allein beim *einem* Glied der Potenzreihe erzeugen.
Die Grundfrequenzen f_1 & f_2 und ihr dritter Teilton, die Duodezim $3f_1$ & $3f_2$ werden verstärkt; und schließlich treten die kubischen Summations- und Differenzstöne in Erscheinung.

² Liegen die Frequenzen von f_1 und f_2 sehr nah beieinander, ist die Frequenz des quadratischen Differenztons nichts anderes als die Schwebungsfrequenz $|f_1-f_2|$, bei Δf bis ca. 10–15 Hz (siehe Kapitel III, Fußnote 4). Die Kombinationstonfrequenz muss mindestens ca. 20–30 Hz betragen, um als Tonhöhe wahrgenommen werden zu können.

³ *Für die Berechnung sei auf Teil V verwiesen.*
Hier nur die Formel für die Tonhöhenermittlung und Centdifferenz von $f_{h\text{-}t}$:

$\ln[(256 \cdot \sqrt[12]{2}^{x} - 256) \div (256 \cdot \sqrt[12]{2}^{-y})] \cdot 1200 \div \ln 2$

für $f_{konstant}$ = 256 Hz, $x = f_{variabel}$ und $y = f_{h\text{-}t}$,
x & y sind Halbtondifferenz-Variablen zu $f_{konstant} = c^1$.

<u>als Beispiel</u>: $f_{variabel} = cis^1$ temperiert

$d(f_{h\text{-}t}) = \ln[(256 \cdot \sqrt[12]{2}^{1} - 256) \div (256 \cdot \sqrt[12]{2}^{-00})] \cdot 1200 \div \ln 2 \approx -4.886$ Cent →

$d(f_{h\text{-}t}) = \ln[(256 \cdot \sqrt[12]{2}^{1} - 256) \div (256 \cdot \sqrt[12]{2}^{-49})] \cdot 1200 \div \ln 2 \approx +14$ Cent

⁴ Für die erste Zelle der Matrix und den Kombinationston *h–t* von 5/8 ($_1A^\flat$) = $^{-14}c^1$ / $^{\pm 0}as^1$ ergibt sich folgende Rechnung:

$d(f_{h\text{-}t}) = \ln[(8 \cdot \sqrt[12]{2}^{-37} - 5 \cdot \sqrt[12]{2}^{-37}) \div \sqrt[12]{2}^{-00}] \cdot 1200 \div \ln 2 \approx -1.798$ Cent →

$d(f_{h\text{-}t}) = \ln[(8 \cdot \sqrt[12]{2}^{-37} - 5 \cdot \sqrt[12]{2}^{-37}) \div \sqrt[12]{2}^{-18}] \cdot 1200 \div \ln 2 \approx +2$ Cent

Der Exponent –37 bezieht sich auf die Differenz des Referenztons a^1 zum Grundton $_1A^\flat$.
Der Exponent –18 bezieht sich auf die Differenz zum Referenzton a^1 = es.

Gleichzeitig ist *h–t* von 5/8 auch der 3. Teilton des Grundtons $_1A^\flat$ (8–5 = 3) = $^{+2}$es.

⁵ Der Kombinationston *h–t* der Frequenzproportionen 8 / 7 & 11 / 6 von ***b*** wird berechnet mit:

$d(f_{h\text{-}t}) = \ln[(11/6 \cdot \sqrt[12]{2}^{-11} - 8/7 \cdot \sqrt[12]{2}^{-11}) \div \sqrt[12]{2}^{-00}] \cdot 1200 \div \ln 2 \approx -1.741$ Cent →

$d(f_{h\text{-}t}) = \ln[(11/6 \cdot \sqrt[12]{2}^{-11} - 8/7 \cdot \sqrt[12]{2}^{-11}) \div \sqrt[12]{2}^{-17}] \cdot 1200 \div \ln 2 \approx -41$ Cent

$h\text{–}t = 11/6 - 8/7 = 29/42$
$d(f_{h\text{-}t}) = \ln[(29/42 \cdot \sqrt[12]{2}^{-11}) \div \sqrt[12]{2}^{-17}] \cdot 1200 \div \ln 2 \approx -41$ Cent

⇒ Klangbeispiel ❼
Beispiel für die Simulation von Kombinationstönen und die Verbindung von Kombinationstönen und Partialtönen

V

Spektrale Tonhöhengenese 3
Der numerische Ansatz

Phänomen

Legt man eine Quint und eine Quart übereinander - am Instrument oder auf dem Notenblatt - entsteht eine Oktav. Rechnerisch aber muss man die Intervalle nicht addieren, sondern multiplizieren, um zum gleichen Ergebnis zu kommen:

Beispiel
c^1 + Quint + Quart = c^2, $c^1 \rightarrow g^1 \rightarrow c^2$

$\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{12}{6} = \frac{2}{1}$

Um nun den numerischen Ausdruck für einen temperierten Halbton zu erhalten, wird *die* Zahl gesucht, die 12 mal mit sich selbst multipliziert den Oktavraum füllt, also 2 ergibt:

$x^{12} = \frac{2}{1} = 2 \quad x = \sqrt[12]{2}$, denn $\sqrt[12]{2}^{12}/1 = 2/1$. $\sqrt[12]{2} = 1{,}05946309...$ (irrational)

$\sqrt[12]{2}$ (= $2^{1/12}$) stellt somit das **Frequenzverhältnis** für einen **temperierten Halbton** dar.
Das Verhältnis 2:1 stellt das Frequenzverhältnis von Oktaven dar (der Umkehrbruch 1:2 das Verhältnis der Saitenlängen); jede nächsthöhere Oktav steht zu ihrem Ausgangston im Verhältnis 2:1, jede nächsttiefere im Verhältnis 1:2.

a^1 = 440 Hz, a^2 = 880 Hz, a^3 = 1760 Hz, a^4 = 3520 Hz, etc.
a = 220 Hz, A = 110 Hz, $_1A$ = 55 Hz, etc.

Der Ausdruck, der dieses Wachstum beschreibt, ist die Potenz 2^n für $n \in \mathbb{Z}$, denn

$2^0 \cdot 440$ Hz = 440 Hz, $2^1 \cdot 440$ Hz = 880 Hz, $2^2 \cdot 440$ Hz = 1760 Hz, $2^3 \cdot 440$ Hz = 3520 Hz, etc.
$2^{-1} \cdot 440$ Hz = 220 Hz, $2^{-2} \cdot 440$ Hz = 110 Hz, $2^{-3} \cdot 440$ Hz = 55 Hz, etc.

⟨allgemein für Potenzen gilt: $x^0=1$, $x^1=x$, $x^{-n}=1/x^n=(1/x)^n$⟩

Frequenzen anderer **temperierter Töne** werden dann beschrieben durch

$$\sqrt[12]{2}^n \cdot 440\text{Hz, für } n \in \mathbb{Z} \quad [\text{oder auch } (2^{1/12})^n \cdot 440\text{Hz}]$$

Beispiel
$c^2 = \sqrt[12]{2}^3 \cdot 440\text{Hz} \approx 523{,}251$ Hz
$c^1 = \sqrt[12]{2}^{-9} \cdot 440\text{Hz} \approx 261{,}626$ Hz
die Oktave $c^1 - c^2$: $2^1 \cdot 261{,}626$ Hz $\approx 523{,}251$ Hz

wobei n hier den Halbtonabstand zum Referenzton a^1 = 440 Hz beschreibt (andere Referenztöne inkl. a^1 = 443 Hz zum Beispiel sind natürlich auch möglich).

Frequenzen von Teiltönen dann mit

$$a/b \cdot \sqrt[12]{2^n} \cdot 440\text{Hz}$$

Beispiel

$$7/1(c^1) = 7/1 \cdot \sqrt[12]{2^{-9}} \cdot 440\text{Hz} \approx 1.831{,}379 \text{ Hz}$$

$$5/9(a^1) = 5/9 \cdot \sqrt[12]{2^0} \cdot 440\text{Hz} = 5/9 \cdot 440\text{Hz} = 244{,}\overline{4} \text{ Hz}$$

hier beschreibt a/b die Proportion des Teiltons (aus der Teiltonmatrix) jenes Grundtons, der als Potenz im Halbtonabstand zu unserem Referenzton a^1 = 440 Hz benannt wird.

Oktaven wachsen also exponentiell zur Basis 2. Wie das Zählen nach jeder Potenz von 10 immer wieder von vorn beginnt, so beginnen sich mit jeder Oktav die Töne zu wiederholen. Die Oktaven werden aus den Potenzen von 2 gebildet, denen damit im Tonsystem dieselbe Rolle zukommt, wie den Potenzen von 10 im Zählsystem.

$$10^0=1,\ 10^1=10,\ 10^2=100,\ 10^3=1000$$

Die Frage nach dem Potenzwert x wird durch $b^n=x$ ausgedrückt, die Frage nach der Basis b durch $\sqrt[n]{x}=b$ (gesucht wird *die* Zahl, die n mal mit sich selbst multipliziert x ergibt), und die Frage nach dem Exponenten n durch $\log_b x=n$ (wievielmal muss man b mit sich selbst multiplizieren, um x zu erhalten?).

$$10^3=1000,\ \sqrt[3]{1000}=10,\ \log_{10}1000=3$$
$$\text{und } \log_{10}1=0,\ \log_{10}10=1,\ \log_{10}100=2$$

Daraus folgt:

$$\log_{10}1000 = \log_{10}(10 \cdot 100) = \log_{10}10 + \log_{10}100 = 3$$

$$\text{allgemein} \quad \langle \log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y \rangle$$

Aufgrund dieser Regel wird beim logarithmischen Rechnen das Multiplizieren auf das Addieren, sowie das Dividieren auf das Subtrahieren zurückgeführt:

$$\langle \log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y \rangle\ .$$

Um nun auch Intervalle und ihre Frequenzen **unabhängig ihrer Oktavlage** zu addieren oder subtrahieren, brauchen wir ein logarithmisches Maß, das die Oktave als Basis hat, also einen Logarithmus mit Basis 2, $\log_2$, kurz ld (logarithmus dualis), so dass gilt ld2 = 1 [wie oft muss man 2 mit sich selbst multiplizieren, um 2 zu erhalten? 1 mal nämlich], bzw. ld(2/1) = 1 [wie oft muss man 2 mit sich selbst malnehmen, um eine Oktave zu erhalten? 1 mal, denn $(2/1)^1 = 2/1$].[1]
Dann ist

$\mathrm{ld}(3/2) \approx 0{,}585$ und $\mathrm{ld}(4/3) \approx 0{,}415$ (wie oft muss man 2 mit sich selbst malnehmen, damit eine Quint bzw. Quart entsteht?)

und weiter für Quint + Quart:

$$\mathrm{ld}(3/2 \cdot 4/3) = \mathrm{ld}(3/2) + \mathrm{ld}(4/3) = 1$$

Eine Oktave hat 1200 Cent, ein temperierter Halbton den 12. Teil, also
$1/12 \cdot 1200$ Cent = 100 Cent, nun auch
$\mathrm{ld}\,\sqrt[12]{2} \cdot 1200$ Cent $=$ 100 Cent und $\mathrm{ld}\,\sqrt[12]{2^{12}} \cdot 1200$ Cent $=$ 1200 Cent.[2]
Dann ist für eine natürliche Quint

$\mathrm{ld}(3/2) \cdot 1200$ Cent $\approx$ 702 Cent und Quart $\mathrm{ld}(4/3) \cdot 1200$ Cent $\approx$ 498 Cent
und Quint + Quart $\mathrm{ld}(3/2 \cdot 4/3) \cdot 1200$ Cent $=$ 1200 Cent

und allgemein bei **Centberechnung von Teiltönen**:

$$\mathrm{ld}\,(a/b) \cdot 1200 \text{ Cent}$$

die temperierten Analoga

für Quint $\mathrm{ld}\,\sqrt[12]{2^7} \cdot 1200$ Cent $=$ 700 Cent
und Quart $\mathrm{ld}\,\sqrt[12]{2^5} \cdot 1200$ Cent $=$ 500 Cent
und Quint + Quart $\mathrm{ld}(\sqrt[12]{2^7} \cdot \sqrt[12]{2^5}) \cdot 1200$ Cent $=$ 1200 Cent
$\langle$zur Erinnerung: $\log_{ъ} x + \log_{ъ} y = \log_{ъ}(x \cdot y)$ $\rangle$
bzw. $(7/12 + 5/12) \cdot 1200$ Cent $=$ 1200 Cent

und allgemein bei **Centberechnung von temperierten Tönen**:

$$\mathrm{ld}\ \sqrt[12]{2^n} \cdot 1200 \text{ Cent}$$

und die Differenz einer natürlichen zur temperierten Quint

$[\mathrm{ld}(3/2) - \mathrm{ld}\,\sqrt[12]{2^7}] \cdot 1200$ Cent $= \mathrm{ld}(3/2 \div \sqrt[12]{2^7}) \cdot 1200$ Cent $\approx +2$ Cent
$\langle$zur Erinnerung: $\log_{ъ} x - \log_{ъ} y = \log_{ъ}(x/y)$ $\rangle$

Da auf dem Taschenrechner die Funktionstaste ld oft nicht existiert, sondern nur die zur Basis 10 als log-Taste, oder zur Basis e als ln-Taste (logarithmus naturalis), rechnen wir um.
Logarithmusfunktionen mit verschiedenen Basen unterscheiden sich nur durch einen konstanten Faktor, es gilt:

$\langle \log_a(x) = \log_{ъ}(x) \cdot \log_a(ъ) \rangle$,

also für ln(x): $\ln(x) = \mathrm{ld}(x) \cdot \ln 2$ und aufgelöst nach ld(x): $\mathrm{ld}(x) = \ln(x) \div \ln 2$
allgemein $\langle \log_{ъ}(x) = \log_a(x) \div \log_a(ъ) \rangle$

bzw. für **$\log_{10}$(x), kurz lg(x)**: $\lg(x) = \mathrm{ld}(x) \cdot \lg 2$, aufgelöst nach ld(x): $\mathrm{ld}(x) = \lg(x) \div \lg 2$

Für die natürliche Quint gilt dann folgendes:
$\ln(3/2) \cdot 1200 \div \ln 2 \approx 702$ (bzw. $\lg(3/2) \cdot 1200 \div \lg 2 \approx 702$)

für Quint + Quart: $\ln(3/2 \cdot 4/3) \cdot 1200 \div \ln 2 = 1200$ (statt ln auch lg)

und die Differenz von reiner zu temperierter Quint:
$\ln(3/2 \div \sqrt[12]{2^7}) \cdot 1200 \div \ln 2 \approx +2$ (statt ln auch lg)

und allgemein

$d = \text{ld}(f_2/f_1) \cdot 1200$ oder
$d = \lg(f_2/f_1) \cdot 1200 \div \lg 2$, bzw.
$d = \ln(f_2/f_1) \cdot 1200 \div \ln 2$

wobei
d = Differenz in Cent
f_2 = Frequenz bzw. Proportion des reinen Teiltons
f_1 = Frequenz bzw. Proportion des temperierten Tons

Beispiel
Differenz von reiner zu temperierter Quint $d\,[3/2(c^1) - g^1]$
mit Frequenzen:
$d = \lg(392{,}438\text{ Hz} \div 391{,}995\text{ Hz}) \cdot 1200\text{ Cent} \div \lg 2 \approx 2\text{ Cent}$

mit Proportionen:
$d = \lg(3/2 \div \sqrt[12]{2^7}) \cdot 1200\text{ Cent} \div \lg 2 \approx 2\text{ Cent}$

(übrigens: bei umgekehrtem Verhältnis, also der Differenz von temperierter zu reiner Quint $d\,[g^1 - 3/2(c^1)]$, liegt die temperierte zur natürlichen dementsprechend um 2 Cent tiefer, sprich $d \approx -2$ Cent)

Hier noch ein paar andere nützliche Frequenzdifferenzen:

$d = \lg(441\text{ Hz} \div 440\text{ Hz}) \cdot 1200\text{ Cent} \div \lg 2 \approx 4\text{ Cent}$ = 1 Schwebung/Sekunde
$d = \lg(442\text{ Hz} \div 440\text{ Hz}) \cdot 1200\text{ Cent} \div \lg 2 \approx 8\text{ Cent}$ = 2 Schwebungen/Sekunde
$d = \lg(443\text{ Hz} \div 440\text{ Hz}) \cdot 1200\text{ Cent} \div \lg 2 \approx 12\text{ Cent}$ = 3 Schwebungen/Sekunde
$d = \lg(444\text{ Hz} \div 440\text{ Hz}) \cdot 1200\text{ Cent} \div \lg 2 \approx 16\text{ Cent}$ = 4 Schwebungen/Sekunde
$d = \lg(445\text{ Hz} \div 440\text{ Hz}) \cdot 1200\text{ Cent} \div \lg 2 \approx 20\text{ Cent}$ = 5 Schwebungen/Sekunde
$d = \lg(446\text{ Hz} \div 440\text{ Hz}) \cdot 1200\text{ Cent} \div \lg 2 \approx 23\text{ Cent}$ = 6 Schwebungen/Sekunde
siehe Kapitel III, Fußnote 4

Auch das berühmte pythagoräische Komma, das verbunden ist mit dem nichtschließenden Quintenzirkel ist mit dieser Formel leicht nachvollziehbar.

Pythagoras verwendete nur die ersten zwei Obertöne und ihr Verhältnis 3:2 für die Berechnung sämtlicher Intervalle. Legt man dieses Verhältnis der natürlichen Quint 12 Mal an, bekommt man wieder eine Oktave: c^1, g^1, d^2, a^2, e^3, h^3, fis^4, cis^5, gis^5, dis^6, ais^6, eis^7, his^7 = c^8.

Dieses c^8 ist aber ein anderes, als eines, das durch Oktaven ermittelt wird: $(3/2)^{12} \neq 2^7$.

Um die Centabweichung zu berechnen, setzt man dieses c^8 zum temperierten Pendant, das sich aus dem sieben Oktaven höheren c^1 ableitet, gemäß der Formel in Relation:
$\lg[(3/2)^{12} \div (2/1)^7] \times 1200 \div \lg 2 \approx 23{,}5$ *Cent.*

Die Kontrolle durch wiederholte Addition der Centabweichung je Quintschritt, 12× +2 Cent, ergibt praktisch den gleichen Wert, nämlich 24 Cent. (Der Unterschied zwischen den zwei Cent-werten erwächst durch die Abweichung des Wertes +2 Cent, der auch nur eine Näherung von dem genaueren Wert 1,955 Cent ist.)

Um allein die Centabweichung eines beliebigen Partialtonverhältnisses eines Grundtons der Teiltonmatrix vom entsprechenden temperierten Pendant zu ermitteln, variieren wir den Exponenten solange, bis bei *d* ein Wert unter 50 erreicht wird, der uns die Centabweichung angibt, der Exponent selber zeigt dann die Halbtondifferenz vom bezugnehmenden Grundton an:

$$d = \lg(a/b \div \sqrt[12]{2^{\pm n}}) \cdot 1200 \div \lg 2, \text{ für } n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } a, b \in \mathbb{N}$$

(den Exponenten zunächst mit 0 angeben, denn $\sqrt[12]{2^0} = 1$)

Beispiel

Gesucht wird Tonhöhe und Centabweichung der natürlichen Quint von c^1

$d\,[3/2(c^1), x] = \lg(3/2 \div \sqrt[12]{2^0}) \cdot 1200 \div \lg 2 \approx 702$

Daraus folgt: $d = \lg(3/2 \div \sqrt[12]{2^7}) \cdot 1200 \div \lg 2 \approx 2$

D.h. die gesuchte Tonhöhe $x = c^1 + 7$ Halbtöne $= g^1$,

die Abweichung beträgt +2 Cent, also: ${}^{+2}g^1$

Wie man sieht, besteht auch die Möglichkeit, den Term $\div\sqrt[12]{2^{\pm n}}$ wegzulassen, d.h. n = 0 zu setzen, so dass das Ergebnis die komplette Centabweichung zum Referenzton, will heißen inklusive Halbtondifferenz in 100-Centschritten, anzeigt.

Also alternativ, wie weiter oben schon gezeigt:

$$d = \ln(a/b) \cdot 1200 \div \ln 2$$

Das Prozedere ist dann 1. die reelle Zahl auf eine ganze Zahl auf- bzw. abzurunden, 2. in 1200er-Schritten die Oktave zu ermitteln, 3. in 100er-Schritten die Halbtöne zu addieren oder abzuziehen und 4. die Centzahl an dem Rest abzulesen (eventuell muss der Halbton nach oben oder unten korrigiert werden, falls der Rest > 50 ist).

Als Beispiel soll - wie im Teil IV - das Teiltonverhältnis von (45 / 14) des Grundtons ***b*** dienen. Die Rechnung lautet:

Beispiel

$d\,[45/14(b), x] = \ln(45/14) \cdot 1200 \div \ln 2 = +2021{,}3978... \approx +2021 =$
$+1200+800+21$, $b+1200 \triangleq b^1$, $b^1+800 \triangleq fis^2$, fis^2+21,
$x = {}^{+21}fis^2$

Haben wir Partialtonverhältnisse zweier verschiedener Grundtöne und wollen deren Differenz ermitteln, brauchen wir einen beliebigen Referenzton, auf den sich beide Proportionen beziehen; dieser ist vorzugsweise einer der beiden gegebenen temperierten Grundtöne, auf den sich die andere Proportion mit ganzzahligem Exponenten, also Halbtondifferenz bezieht:

$$d = \lg[(a_2/b_2 \cdot \sqrt[12]{2^{\pm n}}) \div a_1/b_1] \cdot 1200 \div \lg 2$$

Beispiel

$d\,[5/6(b^1), 3/2(c^1)] = \lg[(5/6 \cdot \sqrt[12]{2^{10}}) \div 3/2] \cdot 1200 \div \lg 2 \approx -18$

Erläuterung: $3/2(c^1) = {}^{+2}g^1$, ${}^{+2}g^1 - 18$ Cent $= {}^{-16}g^1 = 5/6(b^1)$

Für die Ermittlung von Kombinationstönen und deren Centabweichungen nun, müssen wir bei $d = \ln(f_2/f_1) \cdot 1200 \div \ln 2$ noch zusätzlich f_2 als Summe oder Differenz darstellen:

$$d = \ln[(x \cdot a_1/b_1 \cdot \sqrt[12]{2^{\pm n_1}} \pm y \cdot a_2/b_2 \cdot \sqrt[12]{2^{\pm n_2}}) \div \sqrt[12]{2^{\pm n_3}}] \cdot 1200 \div \ln 2,$$

Der Term der inneren Klammer mit dem Additions- bzw. Subtraktionszeichen ist der Ausdruck der entsprechenden Kombinationstonformel, je nachdem, ob ein Summations- oder ein Differenzton errechnet werden soll, x und y sind dabei die Faktoren komplexerer Kombinationstöne und die Proportionen a_1/b_1 bzw. a_2/b_2 die entsprechenden Teiltonverhältnisse von Grundtönen; schließlich beschreiben die Potenzen wieder die Halbtondifferenz zu einem frei zu wählenden Referenzton (z.B. a^1). Der Exponent n_3 des Ausdrucks der äußeren Klammer wird nun solange variiert, bis im Ergebnis *d* ein Wert unter 50 erreicht wird ($d < 50$), er gibt dann die Halbton-differenz zum Referenzton an, *d* ist die Centabweichung dieses ermittelten temperierten Tons.

Beispiel

Gesucht wird der kubische Differenzton *2t–h* von $4/7(c^2) = {}^{+31}d^1$ ‹*t*›, und $5/3(d^1) = {}^{-16}h^1$ ‹*h*› (Teiltöne können aus der Partialtonmatrix abgelesen und transponiert werden). Die Exponenten beziehen sich hier auf den Referenzton a^1.

$$d_{2t-h}\,[4/7(c^2),\ 5/3(d^1)] =$$
$$\ln\,[(2 \cdot 4/7 \cdot \sqrt[12]{2^3} - 5/3 \cdot \sqrt[12]{2^{-7}}) \div \sqrt[12]{2^0}] \cdot 1200 \div \ln 2 \approx -2.423 = -2400-23 \triangleq {}^{-23}A$$

$$d_{2t-h}\,[4/7(c^2),\ 5/3(d^1)] =$$
$$\ln\,[(2 \cdot 4/7 \cdot \sqrt[12]{2^3} - 5/3 \cdot \sqrt[12]{2^{-7}}) \div \sqrt[12]{2^{-24}}] \cdot 1200 \div \ln 2 \approx -23 \triangleq {}^{-23}A$$

Die Kontrolle über die Frequenzen:

$4/7(c^2) = 4/7 \cdot 523{,}251\text{ Hz} = 299{,}001\text{ Hz} \triangleq {}^{+31}d^1$

$5/3(d^1) = 5/3 \cdot 293{,}665\text{ Hz} = 489{,}441\text{ Hz} \triangleq {}^{-16}h^1$

$2t\text{–}h = 2 \cdot 299{,}001\text{ Hz} - 489{,}441\text{ Hz} = 108{,}561\text{ Hz}$

$\ln\,(108{,}561\text{ Hz} \div 110\text{ Hz}) \cdot 1200\text{ Cent} \div \ln 2 \approx -23\text{ Cent}$
(110 Hz entspricht dem *temperierten* A)

[1] Pietro Mengoli führte im 17.Jh. zur Berechnung von Intervallen Logarithmen ein. Euler wies dann 1729 auf die Bedeutung der Logarithmen mit Basis 2 hin, bei denen gleiche Intervalle verschiedener Oktaven auch gleiche, aber irrationale *Mantissen* (hinter dem Komma stehende Ziffern des Logarithmus) besitzen. Die ganze Zahl vor dem Komma gibt die Oktavlage an: ld 3/2 ≈ 0,585; ld 6/2 ≈ 1,585; ld 12/2 ≈ 2,585; ld 12/4 ≈ 1,585; etc.

[2] Alexander John Ellis führte 1885 die Cents, d.h. die Teilung des temperierten Halbtons in 100, der Oktave in 1200 gleich große Teile ein, bzw. Logarithmen zur Basis $\sqrt[1200]{2}$: $\lg_{\sqrt[1200]{2}}(2) = 1200$.

Frequenzen sind absolute Größen, Cents beziehen sich dagegen auf Frequenzverhältnisse. Das Frequenzverhältnis zweier um 1 Cent auseinander liegender Tonhöhen beträgt $\sqrt[1200]{2} = 2^{1/1200} = 1{,}00057779$.

Literatur, Quellen:

Breuer, Hans, *dtv-Atlas zur Physik. Band 1* 1987/1994.

Brüderlin, René *Akustik für Musiker*. Gustav Bosse Verlag Kassel 1978/2003.

Duden *Rechnen und Mathematik*.

Gottwald, Siegfried *Meyers kleine Enzyklopädie Mathematik*. Meyers Lexikonverlag Mannheim 1995.

Hindemith, Paul *Unterweisung im Tonsatz (Theoretischer Teil)*. B. Schott's Söhne, Mainz 1940.

Hirsch, Ferdinand *Das große Wörterbuch der Musik*. Verlag Neue Musik Berlin 1984/1990.

Karlson, Paul *Zauber der Zahlen*. Verlag Ullstein 1954 und 1965.

Kollmeier, Birger *Cocktail-Partys und Hörgeräte: Biophysik des Gehörs*. Physik Journal 1 (2002) Nr.4

Küppers, Harald *Das Grundgesetz der Farbenlehre.* DuMont 1978/1997.

Levy, Moshe H. *Eine leicht verständliche Einführung in **Die Tonsysteme.*** edition mattinata 1997.

Michels, Ulrich *dtv-Atlas zur Musik. Band 1* 1977/1985.

Neubäcker, Peter (Hrsg.) *Harmonik & Glasperlenspiel*. Beiträge 1993 und 1994. Verlag Peter Neubäcker.

Pierce, John R. *Klang, Musik mit den Ohren der Physik.* Spektrum der Wissenschaft 1985.

Reuter, Christoph *Akustisches Praktikum SS 98.* Universität Köln, Philosophische Fakultät, Internetplattform.

Roederer, Juan G. *Physikalische und psychoakustische Grundlagen der Musik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1977, 1993 und 2000.

Sanio, Sabine und Scheib, Christian (Hrsg. für den ORF) *das rauschen*. Wolke Verlag 1995.

Schreier, Ernst *Zweite Staatsprüfung für die Laufbahn des höheren Schuldienstes an Gymnasien Schriftliche Arbeit Physik, Schwingungslehre in Kursstufe 12*. Tübingen September 2003.

Stauder, Wilhelm (Hrsg. Richard Schaal) *Einführung in die Akustik*. Florian Noetzel Verlag 1976/2004.

Winckel, Fritz *Phänomene des musikalischen Hörens, Ästhetisch-Naturwissenschaftliche Betrachtungen*. Stimmen des XX. Jahrhunderts Band 4, Max Hesses Verlag 1960, TU Berlin.

Zender, Hans *Gegenstrebige Harmonik (2000)*. In: Musik-Konzepte Sonderband. *Musik der anderen Tradition, Mikrotonale Tonwelten.* Heinz-Klaus Metzger, Rainer Riehn (Hrsg.) Februar 2003.

Anhang

Tafel 1

⇒ Tonhöhen-Frequenz-Tabelle mit Angabe der Wellenlänge im Umfang $_{3}C \approx 8{,}176$ Hz bis $h^{7} \approx 31.608{,}531$ Hz

Tafel 2

⇒ Teiltonreihe des Kontra-C ($_{1}C$) bis zum 80. Teilton (e^{4}) inkl. Ordnungszahlen, Tonhöhe und Centabweichungen

Tafel 3

⇒ Teiltonmatrix des temperierten Grundtons c^{1} bis zum 13. Ober- bzw. Unterton (14. Teilton) mit Centabweichungen zur temperierten Tonhöhe

Tafel 4

⇒ Innerhalb einer Oktav nach Intervalltyp geordnete Auflistung von Teiltonproportionen gemäß ihrem Vorkommen in der Partialtonreihe mit ihren voneinander differierenden Kombinationstönen. Begrenzung der intervallbildenden Tonhöhen bis zum 32. Teilton. Halbtongrenzen bilden die rein numerischen Centwerte 51 – 149.

Tafel 1

Tonhöhe	Frequenz (Hz)	*T* (ms)	Wellenlänge (m) *c* = 343,8 m/s	Tonhöhe	Frequenz (Hz)	*T* (ms)	Wellenlänge (m) *c* = 343,8 m/s
Infraschall (ab 16 Hz)				groß			
3 C	8,176	122	42,051	C	65,406	15,3	5,256
3 C#	8,662	115	39,691	C#	69,296	14,4	4,961
3 D	9,177	109	37,463	D	73,416	13,6	4,683
3 Eb	9,723	103	35,360	Eb	77,782	12,9	4,420
3 E	10,301	97	33,376	E	82,407	12,1	4,172
3 F	10,913	92	31,503	F	87,307	11,5	3,938
3 F#	11,562	86	29,735	F#	92,499	10,8	3,717
3 G	12,250	82	28,066	G	97,999	10,2	3,508
3 Ab	12,978	77	26,490	Ab	103,826	9,6	3,311
3 A	13,75	73	25,004	A	110	9,1	3,125
3 Bb	14,568	69	23,600	Bb	116,541	8,6	2,950
3 H	15,434	65	22,276	H	123,471	8,1	2,784
Subkontra				klein			
2 C	16,352	61	21,025	c	130,813	7,6	2,628
2 C#	17,324	58	19,845	c#	138,591	7,2	2,481
2 D	18,354	54	18,732	d	146,832	6,8	2,341
2 Eb	19,445	51	17,680	es	155,563	6,4	2,210
2 E	20,602	49	16,688	e	164,814	6,1	2,086
2 F	21,827	46	15,751	f	174,614	5,7	1,969
2 F#	23,125	43	14,867	f#	184,997	5,4	1,858
2 G	24,500	41	14,033	g	195,998	5,1	1,754
2 Ab	25,957	39	13,245	as	207,652	4,8	1,656
2 A	27,5	36	12,502	a	220	4,5	1,563
2 Bb	29,135	34	11,800	b	233,082	4,3	1,475
2 H	30,868	32	11,138	h	246,942	4,0	1,392
Kontra				eingestrichen			
1 C	32,703	31	10,513	c 1	261,626	3,8	1,314
1 C#	34,648	29	9,923	c# 1	277,183	3,6	1,240
1 D	36,708	27	9,366	d 1	293,665	3,4	1,171
1 Eb	38,891	26	8,840	es 1	311,127	3,2	1,105
1 E	41,203	24	8,344	e 1	329,628	3,0	1,043
1 F	43,654	23	7,876	f 1	349,228	2,9	0,984
1 F#	46,249	22	7,434	f# 1	369,994	2,7	0,929
1 G	48,999	20	7,016	g 1	391,995	2,6	0,877
1 Ab	51,913	19	6,623	as 1	415,305	2,4	0,828
1 A	55	18	6,251	**a 1**	**440**	**2,3**	**0,781**
1 Bb	58,270	17	5,900	b 1	466,164	2,1	0,738
1 H	61,735	16	5,569	h 1	493,883	2,0	0,696

Tonhöhe	Frequenz (Hz)	*T* (ms)	Wellenlänge (m) *c* = 343,8 m/s
zweigestrichen			
c 2	523,251	1,91	0,657
c# 2	554,365	1,80	0,620
d 2	587,330	1,70	0,585
es 2	622,254	1,61	0,553
e 2	659,255	1,52	0,521
f 2	698,456	1,43	0,492
f# 2	739,989	1,35	0,465
g 2	783,991	1,28	0,439
as 2	830,609	1,20	0,414
a 2	880	1,14	0,391
b 2	932,328	1,07	0,369
h 2	987,767	1,01	0,348
dreigestrichen			
c 3	1.046,502	0,96	0,329
c# 3	1.108,731	0,90	0,310
d 3	1.174,659	0,85	0,293
es 3	1.244,508	0,80	0,276
e 3	1.318,510	0,76	0,261
f 3	1.396,913	0,72	0,246
f# 3	1.479,978	0,68	0,232
g 3	1.567,982	0,64	0,219
as 3	1.661,219	0,60	0,207
a 3	1.760	0,57	0,195
b 3	1.864,655	0,54	0,184
h 3	1.975,533	0,51	0,174
viergestrichen			
c 4	2.093,005	0,48	0,164
c# 4	2.217,461	0,45	0,155
d 4	2.349,318	0,43	0,146
es 4	2.489,016	0,40	0,138
e 4	2.637,020	0,38	0,130
f 4	2.793,826	0,36	0,123
f# 4	2.959,955	0,34	0,116
g 4	3.135,963	0,32	0,110
as 4	3.322,438	0,30	0,103
a 4	3.520	0,28	0,098
b 4	3.729,310	0,27	0,092
h 4	3.951,066	0,25	0,087

Tonhöhe	Frequenz (Hz)	*T* (ms)	Wellenlänge (m) *c* = 343,8 m/s
fünfgestrichen			
c 5	4.186,009	0,239	0,082
c# 5	4.434,922	0,225	0,078
d 5	4.698,636	0,213	0,073
es 5	4.978,032	0,201	0,069
e 5	5.274,041	0,190	0,065
f 5	5.587,652	0,179	0,062
f# 5	5.919,911	0,169	0,058
g 5	6.271,927	0,159	0,055
as 5	6.644,875	0,150	0,052
a 5	7.040	0,142	0,049
b 5	7.458,620	0,134	0,046
h 5	7.902,133	0,127	0,044
sechsgestrichen			
c 6	8.372,018	0,119	0,041
c# 6	8.869,844	0,113	0,039
d 6	9.397,273	0,106	0,037
es 6	9.956,063	0,100	0,035
e 6	10.548,082	0,095	0,033
f 6	11.175,303	0,089	0,031
f# 6	11.839,822	0,084	0,029
g 6	12.543,854	0,080	0,027
as 6	13.289,750	0,075	0,026
a 6	14.080	0,071	0,024
b 6	14.917,240	0,067	0,023
h 6	15.804,266	0,063	0,022
Ultraschall (ab 20 KHz)			
c 7	16.744,036	0,060	0,021
c# 7	17.739,688	0,056	0,019
d 7	18.794,545	0,053	0,018
es 7	19.912,127	0,050	0,017
e 7	21.096,164	0,047	0,016
f 7	22.350,607	0,045	0,015
f# 7	23.679,643	0,042	0,015
g 7	25.087,708	0,040	0,014
as 7	26.579,501	0,038	0,013
a 7	28.160	0,036	0,012
b 7	29.834,481	0,034	0,012
h 7	31.608,531	0,032	0,011

Tafel 2

Ordnungs zahl	Tonhöhe	Cent
1	**1 C**	**±0**
2	C	±0
3	G	+2
4	c	±0
5	e	−14
6	g	+2
7	b	−31
8	c^1	±0
9	d^1	+4
10	e^1	−14
11	fis^1	−49
12	g^1	+2
13	as^1	+41
14	b^1	−31
15	h^1	−12
16	c^2	±0
17	cis^2	+5
18	d^2	+4
19	es^2	−2
20	e^2	−14
21	f^2	−29
22	fis^2	−49
23	fis^2	+28
24	g^2	+2
25	as^2	−27
26	as^2	+41
27	a^2	+6
28	b^2	−31
29	b^2	+30
30	h^2	−12
31	h^2	+45

Ordnungs zahl	Tonhöhe	Cent
32	c^3	±0
33	cis^3	−47
34	cis^3	+5
35	d^3	−45
36	d^3	+4
37	es^3	−49
38	es^3	−2
39	es^3	+42
40	e^3	−14
41	e^3	+29
42	f^3	−29
43	f^3	+12
44	fis^3	−49
45	fis^3	−10
46	fis^3	+28
47	g^3	−34
48	g^3	+2
49	g^3	+38
50	as^3	−27
51	as^3	+7
52	as^3	+41
53	a^3	−26
54	a^3	+6
55	a^3	+38
56	b^3	−31
57	b^3	−1
58	b^3	+30
59	h^3	−41
60	h^3	−12
61	h^3	+17
62	h^3	+45
63	c^4	−27
64	c^4	±0
65	c^4	+27
66	cis^4	−47
67	cis^4	−21
68	cis^4	+5
69	cis^4	+30
70	d^4	−45
71	d^4	−20
72	d^4	+4
73	d^4	+28
74	es^4	−49
75	es^4	−25
76	es^4	−2
77	es^4	+20
78	es^4	+42
79	e^4	−35
80	e^4	−14

usw.

Tafel 3 ↓ (siehe folgende zwei Seiten)

±0 1/1 c^1	±0 2/1 c^2	+2 3/1 g^2	±0 4/1 c^3	−14 5/1 e^3	+2 6/1 g^3	−31 7/1 b^3
±0 1/2 c	±0 2/2 c^1	+2 3/2 g^1	±0 4/2 c^2	−14 5/2 e^2	+2 6/2 g^2	−31 7/2 b^2
−2 1/3 F	−2 2/3 f	±0 3/3 c^1	−2 4/3 f^1	−16 5/3 a^1	±0 6/3 c^2	−33 7/3 es^2
±0 1/4 C	±0 2/4 c	+2 3/4 g	±0 4/4 c^1	−14 5/4 e^1	+2 6/4 g^1	−31 7/4 b^1
+14 1/5 $_1$As	+14 2/5 As	+16 3/5 es	+14 4/5 as	±0 5/5 c^1	+16 6/5 es^1	−17 7/5 ges^1
−2 1/6 $_1$F	−2 2/6 F	±0 3/6 c	−2 4/6 f	−16 5/6 a	±0 6/6 c^1	−33 7/6 es^1
+31 1/7 $_1$D	+31 2/7 D	+33 3/7 A	+31 4/7 d	+17 5/7 fis	+33 6/7 a	±0 7/7 c^1
±0 1/8 $_1$C	±0 2/8 C	+2 3/8 G	±0 4/8 c	−14 5/8 e	+2 6/8 g	−31 7/8 b
−4 1/9 $_2$B♭	−4 2/9 $_1$B♭	−2 3/9 F	−4 4/9 B♭	−18 5/9 d	−2 6/9 f	−35 7/9 as
+14 1/10 $_2$As	+14 2/10 $_1$As	+16 3/10 Es	+14 4/10 As	±0 5/10 c	+16 6/10 es	−17 7/10 ges
+49 1/11 $_2$Fis	+49 2/11 $_1$Fis	−49 3/11 D	+49 4/11 Fis	+35 5/11 Ais	−49 6/11 d	+18 7/11 e
−2 1/12 $_2$F	−2 2/12 $_1$F	±0 3/12 C	−2 4/12 F	−16 5/12 A	±0 6/12 c	−33 7/12 es
−41 1/13 $_2$E	−41 2/13 $_1$E	−39 3/13 $_1$H	−41 4/13 E	+45 5/13 G	−39 6/13 H	+28 7/13 des
+31 1/14 $_2$D	+31 2/14 $_1$D	+33 3/14 $_1$A	+31 4/14 D	+17 5/14 Fis	+33 6/14 A	±0 7/14 c

±0 $^{8}/_{1}$ c^{4}	+4 $^{9}/_{1}$ d^{4}	-14 $^{10}/_{1}$ e^{4}	-49 $^{11}/_{1}$ fis^{4}	+2 $^{12}/_{1}$ g^{4}	+41 $^{13}/_{1}$ as^{4}	-31 $^{14}/_{1}$ b^{4}
±0 $^{8}/_{2}$ c^{3}	+4 $^{9}/_{2}$ d^{3}	-14 $^{10}/_{2}$ e^{3}	-49 $^{11}/_{2}$ fis^{3}	+2 $^{12}/_{2}$ g^{3}	+41 $^{13}/_{2}$ as^{3}	-31 $^{14}/_{2}$ b^{3}
-2 $^{8}/_{3}$ f^{2}	+2 $^{9}/_{3}$ g^{2}	-16 $^{10}/_{3}$ a^{2}	+49 $^{11}/_{3}$ b^{2}	±0 $^{12}/_{3}$ c^{3}	+39 $^{13}/_{3}$ des^{3}	-33 $^{14}/_{3}$ es^{3}
±0 $^{8}/_{4}$ c^{2}	+4 $^{9}/_{4}$ d^{2}	-14 $^{10}/_{4}$ e^{2}	-49 $^{11}/_{4}$ fis^{2}	+2 $^{12}/_{4}$ g^{2}	+41 $^{13}/_{4}$ as^{2}	-31 $^{14}/_{4}$ b^{2}
+14 $^{8}/_{5}$ as^{1}	+18 $^{9}/_{5}$ b^{1}	±0 $^{10}/_{5}$ c^{2}	-35 $^{11}/_{5}$ d^{2}	+16 $^{12}/_{5}$ es^{2}	-45 $^{13}/_{5}$ f^{2}	-17 $^{14}/_{5}$ ges^{2}
-2 $^{8}/_{6}$ f^{1}	+2 $^{9}/_{6}$ g^{1}	-16 $^{10}/_{6}$ a^{1}	+49 $^{11}/_{6}$ b^{1}	±0 $^{12}/_{6}$ c^{2}	+39 $^{13}/_{6}$ des^{2}	-33 $^{14}/_{6}$ es^{2}
+31 $^{8}/_{7}$ d^{1}	+35 $^{9}/_{7}$ e^{1}	+17 $^{10}/_{7}$ fis^{1}	-18 $^{11}/_{7}$ gis^{1}	+33 $^{12}/_{7}$ a^{1}	-28 $^{13}/_{7}$ h^{1}	±0 $^{14}/_{7}$ c^{2}
±0 $^{8}/_{8}$ c^{1}	+4 $^{9}/_{8}$ d^{1}	-14 $^{10}/_{8}$ e^{1}	-49 $^{11}/_{8}$ fis^{1}	+2 $^{12}/_{8}$ g^{1}	+41 $^{13}/_{8}$ as^{1}	-31 $^{14}/_{8}$ b^{1}
-4 $^{8}/_{9}$ b	±0 $^{9}/_{9}$ c^{1}	-18 $^{10}/_{9}$ d^{1}	+47 $^{11}/_{9}$ es^{1}	-2 $^{12}/_{9}$ f^{1}	+37 $^{13}/_{9}$ ges^{1}	-35 $^{14}/_{9}$ as^{1}
+14 $^{8}/_{10}$ as	+18 $^{9}/_{10}$ b	±0 $^{10}/_{10}$ c^{1}	-35 $^{11}/_{10}$ d^{1}	+16 $^{12}/_{10}$ es^{1}	-45 $^{13}/_{10}$ f^{1}	-17 $^{14}/_{10}$ ges^{1}
+49 $^{8}/_{11}$ fis	-47 $^{9}/_{11}$ a	+35 $^{10}/_{11}$ ais	±0 $^{11}/_{11}$ c^{1}	-49 $^{12}/_{11}$ d^{1}	-10 $^{13}/_{11}$ dis^{1}	+18 $^{14}/_{11}$ e^{1}
-2 $^{8}/_{12}$ f	+2 $^{9}/_{12}$ g	-16 $^{10}/_{12}$ a	+49 $^{11}/_{12}$ b	±0 $^{12}/_{12}$ c^{1}	+39 $^{13}/_{12}$ des^{1}	-33 $^{14}/_{12}$ es^{1}
-41 $^{8}/_{13}$ e	-37 $^{9}/_{13}$ fis	+45 $^{10}/_{13}$ g	+10 $^{11}/_{13}$ a	-39 $^{12}/_{13}$ h	±0 $^{13}/_{13}$ c^{1}	+28 $^{14}/_{13}$ des^{1}
+31 $^{8}/_{14}$ d	+35 $^{9}/_{14}$ e	+17 $^{10}/_{14}$ fis	-18 $^{11}/_{14}$ gis	+33 $^{12}/_{14}$ a	-28 $^{13}/_{14}$ h	±0 $^{14}/_{14}$ c^{1}

Tafel 4 kleine Sekund

(51 – 149 Cent)

Prop.*	Tonhöhen	Größe	h−t	h+t	2t−h	2h−t	3t−h	3h−t	3t−2h	3h−2t
	+2 +41		±0	−27	−49	−31	+28	+6	−14	−12
12:13	c^1 – des^1	+39	[1]$_2$F	[25] cis^2	[11] h	[14] es^1	[23] h^1	[27] d^2	[10] a	[15] e^1
	+41 −31		±0	+6	+2	−12	−27	+30	−49	±0
13:14	c^1 – d^1	+28	[1]$_2$E	[27] cis^2	[12] h	[15] dis^1	[25] c^2	[29] d^2	[11] ais	[16] e^1
	−31 −12		±0	+30	+41	±0	+6	+45	+2	+5
14:15	c^1 – cis^1	+19	[1]$_2$D	[29] c^2	[13] b	[16] d^1	[27] h^1	[31] cis^2	[12] a	[17] es^1
	−12 ±0		±0	+45	−31	+5	+30	−47	+41	+4
15:16	c^1 – des^1	+12	[1]$_2$Des	[31] c^2	[14] h	[17] d^1	[29] h^1	[33] d^2	[13] a	[18] es^1
	±0 +5		±0	−47	−12	+4	+45	−45	−31	−2
16:17	c^1 – des^1	+5	[1]$_2$C	[33] cis^2	[15] h	[18] d^1	[31] h^1	[35] d^2	[14] b	[19] es^1
	+5 +4		±0	−45	±0	−2	−47	−49	−12	−14
17:18	c^1 – cis^1	−1	[1]$_3$H	[35] cis^2	[16] h	[19] d^1	[33] c^2	[37] d^2	[15] ais	[20] dis^1
	+4 −2		±0	−49	+5	−14	−45	+42	±0	−29
18:19	c^1 – des^1	−6	[1]$_3$B♭	[37] cis^2	[17] h	[20] d^1	[35] c^2	[39] des^2	[16] b	[21] es^1
	−2 −14		±0	+42	+4	−29	−49	+29	+5	−49
19:20	c^1 – cis^1	−12	[1]$_3$A	[39] c^2	[18] h	[21] d^1	[37] c^2	[41] cis^2	[17] b	[22] dis^1
	−14 −29		±0	+29	−2	−49	+42	+12	+4	+28
20:21	c^1 – des^1	−15	[1]$_3$As	[41] c^2	[19] h	[22] d^1	[39] h^1	[43] des^2	[18] b	[23] d^1
	−29 −49		±0	+12	−14	+28	+29	−10	−2	+2
21:22	c^1 – cis^1	−20	[1]$_3$G	[43] c^2	[20] h	[23] des^1	[41] h^1	[45] cis^2	[19] b	[24] d^1
	−49 +28		±0	−10	−29	+2	+12	−34	−14	−27
22:23	c^1 – c^1	−23	[1]$_3$Fis	[45] c^2	[21] h	[24] cis^1	[43] h^1	[47] cis^2	[20] ais	[25] d^1
	+28 +2		±0	−34	−49	−27	−10	+38	−29	+41
23:24	c^1 – des^1	−26	[1]$_3$Ges	[47] des^2	[22] c^1	[25] d^1	[45] c^2	[49] des^2	[21] h	[26] d^1
	+2 −27		±0	+38	+28	+41	−34	+7	−49	+6
24:25	c^1 – cis^1	−29	[1]$_3$F	[49] c^2	[23] h	[26] des^1	[47] c^2	[51] des^2	[22] h	[27] d^1
	−27 +41		±0	+7	+2	+6	+38	−26	+28	−31
25:26	c^1 – c^1	−32	[1]$_3$E	[51] c^2	[24] h	[27] cis^1	[49] h^1	[53] cis^2	[23] b	[28] d^1
	+41 +6		±0	−26	−27	−31	+7	+38	+2	+30
26:27	c^1 – cis^1	−35	[1]$_3$E	[53] cis^2	[25] c^1	[28] d^1	[51] c^2	[55] cis^2	[24] h	[29] d^1
	+6 −31		±0	+38	+41	+30	−26	−1	−27	−12
27:28	c^1 – des^1	−37	[1]$_3$Es	[55] c^2	[26] h	[29] des^1	[53] c^2	[57] des^2	[25] h	[30] d^1
	−31 +30		±0	−1	+6	−12	+38	−41	+41	+45
28:29	c^1 – c^1	−39	[1]$_3$D	[57] c^2	[27] h	[30] cis^1	[55] h^1	[59] cis^2	[26] b	[31] cis^1
	+30 −12		±0	−41	−31	+45	−1	+17	+6	±0
29:30	c^1 – cis^1	−42	[1]$_3$D	[59] cis^2	[28] c^1	[31] cis^1	[57] c^2	[61] cis^2	[27] h	[32] d^1
	−12 +45		±0	+17	+30	±0	−41	−27	−31	−47
30:31	c^1 – c^1	−43	[1]$_3$Des	[61] c^2	[29] h	[32] des^1	[59] c^2	[63] des^2	[28] h	[33] d^1
	+45 ±0		±0	−27	−12	−47	+17	+27	+30	+5
31:32	c^1 – des^1	−45	[1]$_3$Des	[63] des^2	[30] c^1	[33] d^1	[61] c^2	[65] des^2	[29] h	[34] d^1

Prop.*	Tonhöhen	Größe	h-t	h+t	2t-h	2h-t	3t-h	3h-t	3t-2h	3h-2t
	+28 -27		±0	+2	-29	+6	-49	+41	-2	+30
23:25	c^1 – d^1	+45	[2]$_2$Ges	[48] des^2	[21] h	[27] es^1	[44] c^2	[52] d^2	[19] a	[29] e^1
	-27 +6		±0	+41	+28	+30	+2	-31	-29	+45
25:27	c^1 – cis^1	+33	[2]$_2$E	[52] c^2	[23] b	[29] d^1	[48] h^1	[56] d^2	[21] a	[31] dis^1
	+6 +30		±0	-31	-27	+45	+41	-12	+28	-47
27:29	c^1 – des^1	+24	[2]$_2$Es	[56] des^2	[25] h	[31] d^1	[52] h^1	[60] d^2	[23] a	[33] e^1
	+30 +45		±0	-12	+6	-47	-31	±0	-27	-45
29:31	c^1 – cis^1	+15	[2]$_2$D	[60] cis^2	[27] h	[33] dis^1	[56] c^2	[64] d^2	[25] ais	[35] e^1

* ***Erweiterungen*** *von Teiltonverhältnissen sind nicht aufgeführt. Ihre* ***Intervallgrössen*** *sind identisch. Um die Kombinationstöne zu berechnen, müssen ihre Ordnungszahlen mit dem gleichen Wert, mit dem die Proportion erweitert worden ist, multipliziert werden.*
Ist der Wert gleich 2^n (n = 1, 2, 3, ...), entstehen einfache Oktav-Translationen der ***Proportion****, alle Tonhöhen bleiben aber faktisch gleich. Weicht der Wert davon ab, alterieren ihre Centwerte und die ihrer Kombinationstöne bei Verrechnung gemäß der Erweiterung mikrotonal.*
Eventuelle Rundungsfehler 'ungenauer' Centwerte entstehen durch ihre Multiplikation.
Intervallgrössen können also sowohl um temperierte Intervalle auf andere Tonhöhen, als auch durch Multiplikation ihrer Proportion natürlich-mikrotonal transponiert werden!

Beispiel 1 (kleine Sekund)

Prop.	Tonhöhen	Größe	h-t	h+t	2t-h	2h-t	3t-h	3h-t	3t-2h	3h-2t
	+2 +41		±0	-27	-49	-31	+28	+6	-14	-12
12:13	c^1 – des^1	+39	[1]$_2$F	[25] cis^2	[11] h	[14] es^1	[23] h^1	[27] d^2	[10] a	[15] e^1

Teiltonverhältnis erweitert bzw. Ordnungszahlen multipliziert mit **2** (±0 Cent) ⇒

Prop.	Tonhöhen	Größe	h-t	h+t	2t-h	2h-t	3t-h	3h-t	3t-2h	3h-2t
	+2 +41		±0	-27	-49	-31	+28	+6	-14	-12
24:26	c^1 – des^1	+39	[2]$_2$F	[50] cis^2	[22] h	[28] es^1	[46] h^1	[54] d^2	[20] a	[30] e^1

Beispiel 2 (große Sekund)

Prop.	Tonhöhen	Größe	h-t	h+t	2t-h	2h-t	3t-h	3h-t	3t-2h	3h-2t
	-31 ±0		±0	-12	+2	+4	+41	+5	-14	-14
7:8	c^1 – d^1	+31	[1]$_1$D	[15] cis^2	[6] a	[9] e^1	[13] b^1	[17] es^2	[5] fis	[10] fis^1

Teiltonverhältnis erweitert bzw. Ordnungszahlen multipliziert mit **3** (+2 Cent) ⇒

Prop.	Tonhöhen	Größe	h-t	h+t	2t-h	2h-t	3t-h	3h-t	3t-2h	3h-2t
	-29 +2		+2	-10	+4	+6	+42	+7	-12	-12
21:24	c^1 – d^1	+31	[3]$_1$D	[45] cis^2	[18] a	[27] e^1	[39] b^1	[51] es^2	[15] fis	[30] fis^1
							Rundung			

Beispiel 3 (kleine Terz)

Prop.	Tonhöhen	Größe	h-t	h+t	2t-h	2h-t	3t-h	3h-t	3t-2h	3h-2t
	-14 +2		±0	-49	±0	-31	+4	+41	+2	±0
5:6	c^1 – es^1	+16	[1]$_1$As	[11] d^2	[4] as	[7] ges^1	[9] b^1	[13] e^2	[3] es	[8] as^1

Teiltonverhältnis erweitert bzw. Ordnungszahlen multipliziert mit **5** (-14 Cent) ⇒

Prop.	Tonhöhen	Größe	h-t	h+t	2t-h	2h-t	3t-h	3h-t	3t-2h	3h-2t
	-27 -12		-14	+38	-14	-45	-10	+27	-12	-14
25:30	c^1 – es^1	+15	[5]$_1$As	[55] des^2	[20] as	[35] ges^1	[45] b^1	[65] e^2	[15] es	[40] as^1
	Rundung	Rundung		Rundung						

große Sekund

(151 – 249 Cent)

Prop.	Tonhöhen	Größe	h−t	h+t	2t−h	2h−t	3t−h	3h−t	3t−2h	3h−2t
	−31 ±0		±0	−12	+2	+4	+41	+5	−14	−14
7:8	c^1 – d^1	+31	$[1]_1$D	[15] cis^2	[6] a	[9] e^1	[13] b^1	[17] es^2	[5] fis	[10] fis^1
	±0 +4		±0	+5	−31	−14	−12	−2	+2	−49
8:9	c^1 – d^1	+4	$[1]_1$C	[17] des^2	[7] b	[10] e^1	[15] h^1	[19] es^2	[6] g	[11] fis^1
	+4 −14		±0	−2	±0	−49	+5	−29	−31	+2
9:10	c^1 – d^1	−18	$[1]_2$B♭	[19] des^2	[8] b	[11] e^1	[17] h^1	[21] es^2	[7] as	[12] f^1
	−14 −49		±0	−29	+4	+2	−2	+28	±0	+41
10:11	c^1 – d^1	−35	$[1]_2$As	[21] des^2	[9] b	[12] es^1	[19] h^1	[23] d^2	[8] as	[13] e^1
	−49 +2		±0	+28	−14	+41	−29	−27	+4	−31
11:12	c^1 – cis^1	−49	$[1]_2$Fis	[23] c^2	[10] ais	[13] d^1	[21] h^1	[25] d^2	[9] gis	[14] e^1
	+41 −12		±0	−31	−49	+5	+2	±0	+4	−2
13:15	c^1 – dis^1	+47	$[2]_1$E	[28] d^2	[11] ais	[17] f^1	[24] h^1	[32] e^2	[9] fis	[19] g^1
	−12 +5		±0	±0	+41	−2	−31	+4	−49	−29
15:17	c^1 – d^1	+17	$[2]_1$Des	[32] des^2	[13] a	[19] e^1	[28] h^1	[36] es^2	[11] g	[21] ges^1
	+5 −2		±0	+4	−12	−29	±0	−14	+41	+28
17:19	c^1 – d^1	−7	$[2]_2$H	[36] cis^2	[15] ais	[21] e^1	[32] h^1	[40] dis^2	[13] g	[23] f^1
	−2 −29		±0	−14	+5	+28	+4	−49	−12	−27
19:21	c^1 – d^1	−27	$[2]_2$A	[40] cis^2	[17] b	[23] es^1	[36] h^1	[44] dis^2	[15] gis	[25] f^1
	−29 +28		±0	−49	−2	−27	−14	+2	+5	+6
21:23	c^1 – des^1	−43	$[2]_2$G	[44] cis^2	[19] b	[25] dis^1	[40] h^1	[48] d^2	[17] as	[27] e^1
	−14 +28		+2	+12	+5	+41	−49	+38	−31	+30
20:23	c^1 – d^1	+42	$[3]_1$Es	[43] des^2	[17] a	[26] e^1	[37] h^1	[49] es^2	[14] ges	[29] ges^1
	−49 −27		+2	−34	−2	−31	+29	−26	±0	+45
22:25	c^1 – d^1	+22	$[3]_1$Cis	[47] cis^2	[19] a	[28] e^1	[41] ais^1	[53] dis^2	[16] fis	[31] f^1
	+28 +41		+2	+38	−14	+30	+12	+38	+5	±0
23:26	c^1 – d^1	+13	$[3]_1$Des	[49] des^2	[20] b	[29] e^1	[43] h^1	[55] es^2	[17] g	[32] ges^1
	−27 −31		+2	−26	−49	+45	−34	−41	−2	+5
25:28	c^1 – d^1	−4	$[3]_2$H	[53] cis^2	[22] ais	[31] dis^1	[47] h^1	[59] dis^2	[19] g	[34] f^1
	+41 +30		+2	+38	+28	±0	+38	+17	−14	−45
26:29	c^1 – d^1	−11	$[3]_2$H	[55] cis^2	[23] b	[32] e^1	[49] h^1	[61] dis^2	[20] gis	[35] fis^1
	−31 +45		+2	−41	−27	+5	−26	±0	−49	−49
28:31	c^1 – cis^1	−24	$[3]_2$A	[59] cis^2	[25] ais	[34] es^1	[53] h^1	[64] d^2	[22] gis	[37] f^1
	+30 ±0		+2	+17	+41	−45	+38	−21	+28	−2
29:32	c^1 – d^1	−30	$[3]_2$A	[61] cis^2	[26] b	[35] e^1	[55] h^1	[67] dis^2	[23] as	[38] f^1
	+6 +45		±0	+30	+28	−45	−27	−47	−2	+42
27:31	c^1 – d^1	+39	$[4]_1$Es	[58] des^2	[23] a	[35] f^1	[50] h^1	[66] e^2	[19] ges	[39] ges^1

kleine Terz

(251 – 349 Cent)

Prop.	Tonhöhen	Größe	h−t	h+t	2t−h	2h−t	3t−h	3h−t	3t−2h	3h−2t
	−14 +2		±0	−49	±0	−31	+4	+41	+2	±0
5:6	c^1 – es^1	+16	$[1]_1$As	[11] d^2	[4] as	[7] ges^1	[9] b^1	[13] e^2	[3] es	[8] as^1
	+2 −31		±0	+41	−14	±0	−49	−12	±0	+4
6:7	c^1 – es^1	−33	$[1]_1$F	[13] des^2	[5] a	[8] f^1	[11] h^1	[15] e^2	[4] f	[9] g^1
	+4 −49		±0	−14	−31	+41	±0	+2	−14	−12
9:11	c^1 – e^1	+47	$[2]_1$B♭	[20] d^2	[7] as	[13] ges^1	[16] b^1	[24] f^2	[5] d	[15] a^1
	−49 +41		±0	+2	+4	−12	−14	−31	−31	+5
11:13	c^1 – d^1	−10	$[2]_1$Fis	[24] cis^2	[9] gis	[15] f^1	[20] ais^1	[28] e^2	[7] e	[17] g^1
	−31 +5		+2	+45	−49	−14	−27	−49	±0	+28
14:17	c^1 – es^1	+36	$[3]_1$A	[31] cis^2	[11] gis	[20] fis^1	[25] ais^1	[37] f^2	[8] d	[23] as^1
	±0 −2		+2	−45	+41	−49	+30	+29	−14	−27
16:19	c^1 – es^1	−2	$[3]_1$G	[35] d^2	[13] as	[22] fis^1	[29] b^1	[41] e^2	[10] e	[25] gis^1
	+5 −14		+2	−49	−31	+28	+45	+12	−49	+41
17:20	c^1 – dis^1	−19	$[3]_1$Fis	[37] d^2	[14] a	[23] f^1	[31] ais^1	[43] e^2	[11] f	[26] g^1
	−2 −49		+2	+29	±0	−27	−45	−34	+41	−31
19:22	c^1 – dis^1	−47	$[3]_1$E	[41] cis^2	[16] a	[25] f^1	[35] h^1	[47] e^2	[13] f	[28] g^1
	−2 +28		±0	−29	−12	+6	+5	−27	−49	+45
19:23	c^1 – es^1	+30	$[4]_1$A	[42] d^2	[15] gis	[27] fis^1	[34] b^1	[50] f^2	[11] dis	[31] gis^1
	−29 −27		±0	+28	+5	+30	−2	+6	+41	−47
21:25	c^1 – dis^1	+2	$[4]_1$G	[46] des^2	[17] as	[29] f^1	[38] b^1	[54] e^2	[13] es	[33] gis^1
	+28 +6		±0	−27	−2	+45	−29	+30	−12	−45
23:27	c^1 – es^1	−22	$[4]_1$Ges	[50] d^2	[19] a	[31] f^1	[42] h^1	[58] e^2	[15] f	[35] as^1
	−27 +30		±0	+6	−29	−47	+28	+45	+5	−49
25:29	c^1 – d^1	−43	$[4]_1$E	[54] cis^2	[21] a	[33] f^1	[46] b^1	[62] dis^2	[17] f	[37] g^1
	+28 −31		−14	+7	+4	−47	+29	+17	+41	−2
23:28	c^1 – e^1	+41	$[5]_1$B♭	[51] d^2	[18] as	[33] g^1	[41] b^1	[61] f^2	[13] d	[38] a^1
	+2 +30		−14	−26	−2	+5	+12	−27	−31	+42
24:29	c^1 – es^1	+28	$[5]_1$A	[53] d^2	[19] as	[34] ges^1	[43] b^1	[63] f^2	[14] es	[39] as^1
	+41 +45		−14	−1	−29	+4	−34	−21	±0	+29
26:31	c^1 – dis^1	+4	$[5]_1$Gis	[57] d^2	[21] a	[36] fis^1	[47] h^1	[67] f^2	[16] e	[41] gis^1
	+6 ±0		−14	−41	−49	−49	+38	+30	+5	−29
27:32	c^1 – es^1	−6	$[5]_1$G	[59] d^2	[22] a	[37] fis^1	[49] b^1	[69] e^2	[17] e	[42] as^1

große Terz

(351 – 449 Cent)

Prop.	Tonhöhen	Größe	h−t	h+t	2t−h	2h−t	3t−h	3h−t	3t−2h	3h−2t
4:5	±0 −14 c^1 – e^1	−14	±0 [1] C	+4 [9] d^2	+2 [3] g	+2 [6] g^1	−31 [7] b^1	−49 [11] fis^2	±0 [2] c	−31 [7] b^1
7:9	−31 +4 c^1 – e^1	+35	±0 [2] D	±0 [16] d^2	−14 [5] fis	−49 [11] gis^1	+2 [12] a^1	−14 [20] fis^2	+2 [3] A	+41 [13] b^1
11:14	−49 −31 c^1 – e^1	+18	+2 [3] Cis	−27 [25] d^2	±0 [8] fis	+5 [17] g^1	−2 [19] a^1	+45 [31] f^2	−14 [5] Ais	−14 [20] ais^1
13:16	+41 ±0 c^1 – e^1	−41	+2 $[3]_1$H	+30 [29] d^2	−14 [10] gis	−2 [19] g^1	+28 [23] b^1	−45 [35] fis^2	−31 [7] d	−49 [22] ais^1
15:19	−12 −2 c^1 – e^1	+10	±0 [4] Des	+5 [34] d^2	−49 [11] g	+28 [23] g^1	+41 [26] a^1	−29 [42] ges^2	−31 [7] H	+6 [27] b^1
17:21	+5 −29 c^1 – e^1	−34	±0 $[4]_1$H	−2 [38] d^2	+41 [13] g	−27 [25] g^1	−12 [30] ais^1	+28 [46] f^2	+4 [9] cis	+30 [29] a^1
17:22	+5 −49 c^1 – f^1	+46	−14 [5] Dis	+42 [39] d^2	+2 [12] fis	+6 [27] gis^1	+30 [29] a^1	+38 [49] fis^2	−31 [7] A	±0 [32] h^1
18:23	+4 +28 c^1 – e^1	+24	−14 [5] D	+29 [41] d^2	+41 [13] ges	−31 [28] a^1	+45 [31] a^1	+7 [51] ges^2	±0 [8] B♭	−47 [33] h^1
19:24	−2 +2 c^1 – e^1	+4	−14 [5] Cis	+12 [43] d^2	−31 [14] g	+30 [29] g^1	−47 [33] ais^1	−26 [53] fis^2	+4 [9] H	+5 [34] b^1
21:26	−29 +41 c^1 – es^1	−30	−14 $[5]_1$H	−34 [47] d^2	±0 [16] g	+45 [31] fis^1	−49 [37] ais^1	−1 [57] f^2	−49 [11] cis	+4 [36] a^1
22:27	−49 +6 c^1 – dis^1	−45	−14 $[5]_1$Ais	+38 [49] cis^2	+5 [17] g	±0 [32] fis^1	+42 [39] a^1	−41 [59] f^2	+2 [12] cis	−49 [37] a^1
23:29	+28 +30 c^1 – e^1	+2	+2 [6] Des	+41 [52] d^2	+5 [17] g	−45 [35] as^1	−14 [40] b^1	±0 [64] ges^2	−49 [11] c	+29 [41] b^1
25:31	−27 +45 c^1 – dis^1	−28	+2 $[6]_1$H	−31 [56] d^2	−2 [19] g	−49 [37] g^1	−49 [44] ais^1	+5 [68] f^2	+41 [13] c	+12 [43] a^1
24:31	+2 +45 c^1 – e^1	+43	−31 [7] Es	+38 [55] d^2	+5 [17] ges	−2 [38] as^1	+29 [41] a^1	+30 [69] ges^2	−14 [10] A	−10 [45] h^1
25:32	−27 ±0 c^1 – e^1	+27	−31 [7] D	−1 [57] d^2	+4 [18] fis	+42 [39] g^1	+12 [43] a^1	−20 [71] fis^2	−49 [11] Ais	+28 [46] b^1

reine Quart

(451 – 549 Cent)

Prop.	Tonhöhen	Größe	h–t	h+t	2t–h	2h–t	3t–h	3h–t	3t–2h	3h–2t
3:4	+2 ±0 $c^1 – f^1$	−2	±0 [1] F	−31 [7] es^2	±0 [2] f	−14 [5] a^1	−14 [5] a^1	+4 [9] g^2	±0 [1] F	+2 [6] c^2
10:13	−14 +41 $c^1 – e^1$	−45	+2 [3] Es	+28 [23] d^2	−31 [7] ges	±0 [16] as^1	+5 [17] a^1	+30 [29] ges^2	±0 [4] As	−2 [19] h^1
11:15	−49 −12 $c^1 – f^1$	+37	±0 [4] Fis	+41 [26] d^2	−31 [7] e	−2 [19] a^1	+4 [18] gis^1	+5 [34] g^2	+2 [3] Cis	+28 [23] c^2
13:17	+41 +5 $c^1 – f^1$	−36	±0 [4] E	−12 [30] dis^2	+4 [9] fis	−29 [21] a^1	−49 [22] ais^1	−2 [38] g^2	−14 [5] Gis	−27 [25] c^2
14:19	−31 −2 $c^1 – f^1$	+29	−14 [5] Fis	−47 [33] dis^2	+4 [9] e	+2 [24] a^1	+28 [23] as^1	+12 [43] g^2	±0 [4] D	+30 [29] c^2
16:21	±0 −29 $c^1 – f^1$	−29	−14 [5] E	−49 [37] dis^2	−49 [11] fis	+41 [26] as^1	+6 [27] a^1	−34 [47] g^2	+2 [6] G	+45 [31] h^1
17:23	+5 +28 $c^1 – f^1$	+23	+2 [6] Fis	−14 [40] dis^2	−49 [11] f	+30 [29] a^1	−31 [28] a^1	+41 [52] g^2	−14 [5] Dis	−45 [35] cis^2
19:25	−2 −27 $c^1 – f^1$	−25	+2 [6] E	−49 [44] dis^2	+41 [13] f	+45 [31] gis^1	±0 [32] a^1	−31 [56] g^2	−31 [7] G	−49 [37] c^2
19:26	−2 +41 $c^1 – f^1$	+43	−31 [7] G	−10 [45] dis^2	+2 [12] e	−47 [33] ais^1	+45 [31] gis^1	−41 [59] gis^2	−14 [5] Cis	−14 [40] cis^2
20:27	−14 +6 $c^1 – f^1$	+20	−31 [7] Ges	−34 [47] es^2	+41 [13] e	+5 [34] a^1	−47 [33] a^1	+17 [61] g^2	+2 [6] Es	+29 [41] c^2
22:29	−49 +30 $c^1 – e^1$	−21	−31 [7] E	+7 [51] d^2	−12 [15] f	+4 [36] gis^1	−49 [37] a^1	+27 [65] fis^2	±0 [8] Fis	+12 [43] h^1
23:30	+28 −12 $c^1 – f^1$	−40	−31 [7] E	−26 [53] es^2	±0 [16] ges	−49 [37] a^1	+42 [39] a^1	−21 [67] g^2	+4 [9] As	−49 [44] c^2
23:31	+28 +45 $c^1 – f^1$	+17	±0 [8] Ges	+6 [54] es^2	−12 [15] f	+42 [39] a^1	−2 [38] a^1	−45 [70] as^2	−31 [7] E	−34 [47] des^2

übermäßige Quart/verminderte Quint

(551 – 649 Cent)

Prop.	Tonhöhen	Größe	h−t	h+t	2t−h	2h−t	3t−h	3h−t	3t−2h	3h−2t
5:7	−14 −31 c^1 – ges^1	−17	±0 [2] As	+2 [12] es^2	+2 [3] es	+4 [9] b^1	±0 [8] as^1	±0 [16] as^2	±0 $[1]_1$As	−49 [11] d^2
7:10	−31 −14 c^1 – fis^1	+17	+2 [3] A	+5 [17] es^2	±0 [4] d	+41 [13] b^1	−49 [11] gis^1	+28 [23] as^2	±0 $[1]_1$D	±0 [16] d^2
8:11	±0 −49 c^1 – fis^1	−49	+2 [3] G	−2 [19] es^2	−14 [5] e	−31 [14] b^1	+41 [13] as^1	−27 [25] gis^2	±0 [2] C	+5 [17] des^2
9:13	+4 +41 c^1 – ges^1	+37	±0 [4] B♭	−49 [22] e^2	−14 [5] d	+5 [17] h^1	−31 [14] as^1	−12 [30] a^2	±0 $[1]_2$B♭	−29 [21] es^2
11:16	−49 ±0 c^1 – fis^1	+49	−14 [5] Ais	+6 [27] dis^2	+2 [6] cis	−29 [21] h^1	+5 [17] g^1	−49 [37] a^2	±0 $[1]_2$Fis	+41 [26] d^2
12:17	+2 +5 c^1 – ges^1	+3	−14 [5] A	+30 [29] es^2	−31 [7] es	−49 [22] h^1	−2 [19] as^1	+42 [39] as^2	±0 $[2]_1$F	+6 [27] d^2
13:18	+41 +4 c^1 – fis^1	−37	−14 [5] Gis	+45 [31] dis^2	±0 [8] e	+28 [23] b^1	−29 [21] a^1	+29 [41] gis^2	+2 $[3]_1$H	−31 [28] d^2
16:23	±0 +28 c^1 – ges^1	+28	−31 [7] B♭	+42 [39] es^2	+4 [9] d	−12 [30] h^1	−27 [25] gis^1	−26 [53] a^2	±0 $[2]_1$C	−49 [37] dis^2
17:24	+5 +2 c^1 – fis^1	−3	−31 [7] A	+29 [41] dis^2	−14 [10] dis	+45 [31] ais^1	+6 [27] gis^1	+38 [55] gis^2	+2 $[3]_1$Fis	−2 [38] d^2
18:25	+4 −27 c^1 – fis^1	−31	−31 [7] As	+12 [43] es^2	−49 [11] e	±0 [32] b^1	+30 [29] as^1	−1 [57] as^2	±0 $[4]_1$B♭	+42 [39] des^2
19:27	−2 +6 c^1 – fis^1	+8	±0 [8] A	+28 [46] es^2	−49 [11] dis	−45 [35] h^1	−12 [30] gis^1	+45 [62] gis^2	+2 $[3]_1$E	+12 [43] d^2
21:29	−29 +30 c^1 – f^1	−41	±0 [8] G	−27 [50] dis^2	+41 [13] es	−49 [37] ais^1	+5 [34] as^1	−47 [66] gis^2	−14 $[5]_1$H	−10 [45] cis^2
20:29	−14 +30 c^1 – ges^1	+44	+4 [9] B♭	+38 [49] es^2	−49 [11] d	−2 [38] h^1	+45 [31] g^1	−21 [67] a^2	±0 $[2]_2$As	−34 [47] es^2
22:31	−49 +45 c^1 – f^1	−6	+4 [9] Gis	−26 [53] dis^2	+41 [13] d	−14 [40] ais^1	−45 [35] gis^1	−20 [71] gis^2	±0 $[4]_1$Fis	+38 [49] cis^2
23:32	+28 ±0 c^1 – ges^1	−28	+4 [9] As	+38 [55] es^2	−31 [14] e	+29 [41] b^1	−49 [37] a^1	+28 [73] as^2	−14 $[5]_1$B♭	−27 [50] d^2

reine Quint

(651 – 749 Cent)

Prop.	Tonhöhen	Größe	h–t	h+t	2t–h	2h–t	3t–h	3h–t	3t–2h	3h–2t
	±0 +2		±0	−14	±0	±0	+2	−31		−14
2:3	c^1 – g^1	+2	[1] c	[5] e^2	[1] c	[4] c^2	[3] g^1	[7] b^2	[0]* –	[5] e^2
	+41 −2		+2	±0	−31	−27	−14	−49	±0	+45
13:19	c^1 – g^1	−43	[6] H	[32] e^2	[7] d	[25] c^2	[20] gis^1	[44] ais^2	[1]$_2$E	[31] dis^2
	+41 −14		−31	−47	+2	+6	−2	−34	±0	+5
13:20	c^1 – gis^1	+45	[7] d	[33] f^2	[6] H	[27] cis^2	[19] g^1	[47] h^2	[−1]*$_2$E	[34] f^2
	−12 −49		−31	−49	±0	+30	+28	+7	±0	+4
15:22	c^1 – g^1	−37	[7] H	[37] e^2	[8] cis	[29] h^1	[23] g^1	[51] a^2	[1]$_2$Cis	[36] dis^2
	−12 +28		±0	−2	−31	+45	−49	+6	±0	+42
15:23	c^1 – g^1	+40	[8] des	[38] e^2	[7] H	[31] c^2	[22] g^1	[54] b^2	[−1]$_2$Des	[39] e^2
	+5 −27		±0	−29	+4	−47	+41	+30	±0	+29
17:25	c^1 – g^1	−32	[8] H	[42] e^2	[9] cis	[33] c^2	[26] g^1	[58] a^2	[1]$_3$H	[41] dis^2
	+5 +41		+4	+12	±0	−45	−27	+17	±0	−49
17:26	c^1 – g^1	+36	[9] cis	[43] e^2	[8] H	[35] cis^2	[25] g^1	[61] ais^2	[−1]$_3$H	[44] f^2
	−2 −31		+4	−34	−14	−49	+30	+27	±0	+28
19:28	c^1 – g^1	−29	[9] H	[47] e^2	[10] cis	[37] c^2	[29] g^1	[65] a^2	[1]$_3$A	[46] es^2
	−2 +30		−14	+2	+4	+42	−31	+5	±0	+38
19:29	c^1 – g^1	+32	[10] cis	[48] e^2	[9] H	[39] c^2	[28] g^1	[68] b^2	[−1]$_3$A	[49] e^2
	−29 +45		−14	+41	−49	+29	±0	+4	±0	+7
21:31	c^1 – fis^1	−26	[10] H	[52] es^2	[11] cis	[41] h^1	[32] g^1	[72] a^2	[1]$_3$G	[51] es^2
	−29 ±0		−49	−26	−14	+12	+45	−25	±0	+6
21:32	c^1 – g^1	+29	[11] cis	[53] e^2	[10] H	[43] c^2	[31] fis^1	[75] ais^2	[−1]$_3$G	[54] e^2

* Ordnungszahl [0] bedeutet tatsächlich auch unhörbare 0 Hz.

Alle **negativen** Ordnungszahlen und damit auch alle negativen Frequenzen wandelt man in positive um. Sie sind gleichbedeutend und werden aus dem **Betrag** der Kombinationstonformel gewonnen. Es gilt: $h-t = |t-h|$ und $|3t-2h| = 2h-3t$ für $3t < 2h$.

Ausgehend von der Kreisfrequenz $2\pi \cdot f$ lassen sich 'negative Frequenzen' beschreiben mit *sin* $(-f \cdot 2\pi t)$ bzw. *cos* $(-f \cdot 2\pi t)$.
Es ist *sin* $(-f \cdot 2\pi t)$ = *sin* $(-\omega t)$ = *sin* $(-\alpha)$ und *cos* $(-f \cdot 2\pi t)$ = *cos* $(-\omega t)$ = *cos* $(-\alpha)$.
Für Winkelgrössen **im** Uhrzeigersinn *cos* $(-\alpha)$ und *sin* $(-\alpha)$ gilt aber: *cos* $(-\alpha)$ = *cos* α, heißt, dass die Kurve der Kosinusfunktion axialsymmetrisch zur y-Achse ist und weiterhin *sin* $(-\alpha)$ = −*sin* α, heißt, dass die Kurve der Sinusfunktion punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist. Das Minuszeichen vorm Sinus stellt lediglich eine 180°-Phasenverschiebung dar. Diese Beziehungen kann man sich an der graphischen Darstellung beider Funktionen gut veranschaulichen.
D.h. aber, dass letztendlich nur der Frequenzbetrag relevant ist. *Siehe auch Kapitel IV*

kleine Sext

(751 – 849 Cent)

Prop.	Tonhöhen	Größe	h–t	h+t	2t–h	2h–t	3t–h	3h–t	3t–2h	3h–2t
5:8	−14 ±0 c^1 – as^1	+14	+2 [3] es	+41 [13] e^2	±0 [2] As	−49 [11] d^2	−31 [7] ges^1	−2 [19] h^2	±0 [−1]$_1$As	−31 [14] ges^2
7:11	−31 −49 c^1 – gis^1	−18	±0 [4] d	+4 [18] e^2	+2 [3] A	−12 [15] cis^2	−14 [10] fis^1	+41 [26] b^2	±0 [−1]$_1$D	−2 [19] f^2
8:13	±0 +41 c^1 – as^1	+41	−14 [5] e	−29 [21] f^2	+2 [3] G	+4 [18] d^2	−49 [11] fis^1	+45 [31] h^2	±0 [−2] C	+28 [23] ges^2
9:14	+4 −31 c^1 – as^1	−35	−14 [5] d	+28 [23] e^2	±0 [4] B♭	−2 [19] des^2	+41 [13] ges^1	−47 [33] h^2	±0 [−1]$_2$B♭	+2 [24] f^2
11:17	−49 +5 c^1 – g^1	−46	+2 [6] cis	−31 [28] e^2	−14 [5] Ais	+28 [23] c^2	±0 [16] fis^1	−14 [40] ais^2	±0 [−1]$_2$Fis	+30 [29] e^2
12:19	+2 −2 c^1 – as^1	−4	−31 [7] es	+45 [31] e^2	−14 [5] A	+41 [26] c^2	+5 [17] ges^1	−10 [45] h^2	±0 [−2]$_1$F	−47 [33] fis^2
13:21	+41 −29 c^1 – a^1	+30	±0 [8] e	+5 [34] f^2	−14 [5] Gis	+30 [29] d^2	+4 [18] fis^1	−27 [50] c^3	+2 [−3]$_1$H	−49 [37] g^2
16:25	±0 −27 c^1 – gis^1	−27	+4 [9] d	+29 [41] e^2	−31 [7] B♭	+5 [34] des^2	+28 [23] ges^1	−41 [59] h^2	±0 [−2]$_1$C	+12 [43] f^2
17:27	+5 +6 c^1 – gis^1	+1	−14 [10] dis	−49 [44] f^2	−31 [7] A	−49 [37] d^2	+2 [24] fis^1	±0 [64] h^2	+2 [−3]$_1$Fis	−34 [47] fis^2
18:29	+4 +30 c^1 – as^1	+26	−49 [11] e	−34 [47] f^2	−31 [7] As	−14 [40] d^2	−27 [25] fis^1	+30 [69] h^2	±0 [−4]$_1$B♭	+7 [51] ges^2
19:30	−2 −12 c^1 – gis^1	−10	−49 [11] dis	+38 [49] e^2	±0 [8] A	+29 [41] cis^2	+6 [27] fis^1	−20 [71] h^2	+2 [−3]$_1$E	+41 [52] f^2
20:31	−14 +45 c^1 – g^1	−41	−49 [11] d	+7 [51] e^2	+4 [9] B♭	−29 [42] des^2	+30 [29] ges^1	+28 [73] b^2	±0 [−2]$_2$As	−26 [53] f^2
19:31	−2 +45 c^1 – gis^1	+47	+2 [12] e	−27 [50] f^2	−31 [7] G	+12 [43] d^2	+41 [26] f^1	−49 [74] c^3	−14 [−5] Cis	+38 [55] fis^2

große Sext

(851 – 949 Cent)

Prop.	Tonhöhen	Größe	h–t	h+t	2t–h	2h–t	3t–h	3h–t	3t–2h	3h–2t
3:5	+2 −14 c^1 – a^1	−16	±0 [2] f	±0 [8] f^2	±0 [1] F	−31 [7] es^2	±0 [4] f^1	+2 [12] c^3	±0 [−1] F	+4 [9] g^2
7:12	−31 +2 c^1 – a^1	+33	−14 [5] fis	−2 [19] f^2	±0 [2] D	+5 [17] es^2	+4 [9] e^1	+30 [29] c^3	+2 [−3] A	−49 [22] gis^2
10:17	−14 +5 c^1 – a^1	+19	−31 [7] ges	+6 [27] f^2	+2 [3] Es	+2 [24] es^2	+41 [13] e^1	+29 [41] c^3	±0 [−4] As	+45 [31] g^2
11:18	−49 +4 c^1 – gis^1	−47	−31 [7] e	+30 [29] e^2	±0 [4] Fis	−27 [25] d^2	−12 [15] f^1	+12 [43] h^2	+2 [−3] Cis	±0 [32] fis^2
11:19	−49 −2 c^1 – a^1	+47	±0 [8] fis	−12 [30] f^2	+2 [3] Cis	+6 [27] dis^2	−31 [14] e^1	+28 [46] c^3	−14 [−5] Ais	−45 [35] gis^2
13:22	+41 −49 c^1 – ais^1	+10	+4 [9] fis	−45 [35] fis^2	±0 [4] E	+45 [31] dis^2	+5 [17] f^1	−26 [53] cis^3	−14 [−5] Gis	−14 [40] gis^2
14:23	−31 +28 c^1 – as^1	−41	+4 [9] e	−49 [37] f^2	−14 [5] Fis	±0 [32] d^2	−2 [19] f^1	+38 [55] h^2	±0 [−4] D	+29 [41] fis^2
16:27	±0 +6 c^1 – a^1	+6	−49 [11] fis	+12 [43] f^2	−14 [5] E	−2 [38] es^2	−29 [21] f^1	+27 [65] c^3	+2 [−6] G	+38 [49] g^2
17:28	+5 −31 c^1 – a^1	−36	−49 [11] f	−10 [45] f^2	+2 [6] Fis	+42 [39] d^2	+28 [23] f^1	−21 [67] c^3	−14 [−5] Dis	−27 [50] g^2
17:29	+5 +30 c^1 – a^1	+25	+2 [12] fis	+28 [46] f^2	−14 [5] Dis	+29 [41] dis^2	−49 [22] f^1	−45 [70] cis^3	−31 [−7] A	−26 [53] gis^2
18:31	+4 +45 c^1 – a^1	+41	+41 [13] ges	+38 [49] f^2	−14 [5] D	−49 [44] e^2	+28 [23] e^1	−25 [75] cis^3	±0 [−8] B♭	−1 [57] as^2
19:32	−2 ±0 c^1 – a^1	+2	+41 [13] f	+7 [51] f^2	+2 [6] E	−10 [45] dis^2	−27 [25] f^1	+20 [77] c^3	−31 [−7] G	+30 [58] g^2

kleine Septim

(951 – 1049 Cent)

Prop.	Tonhöhen	Größe	h–t	h+t	2t–h	2h–t	3t–h	3h–t	3t–2h	3h–2t
	±0 –31		+2	–49	±0	–14	–14	+5	±0	+41
4:7	c^1 – b^1	–31	[3] g	[11] fis^2	[1] C	[10] e^2	[5] e^1	[17] des^3	[–2] c	[13] as^2
	–14 +4		±0	–31	±0	+41	+2	–49	+2	+5
5:9	c^1 – b^1	+18	[4] as	[14] ges^2	[1]$_1$As	[13] e^2	[6] es^1	[22] d^3	[–3] es	[17] a^2
	+2 –49		–14	+5	±0	±0	–31	+6	±0	–29
6:11	c^1 – h^1	+49	[5] a	[17] ges^2	[1]$_1$F	[16] f^2	[7] es^1	[27] d^3	[–4] f	[21] b^2
	+4 ±0		–31	–27	±0	+28	–49	+42	–14	–12
9:16	c^1 – b^1	–4	[7] as	[25] fis^2	[2]$_1$B♭	[23] e^2	[11] e^1	[39] des^3	[–5] d	[30] a^2
	–49 –14		+4	+45	±0	+30	+41	+38	–31	–2
11:20	c^1 – ais^1	+35	[9] gis	[31] f^2	[2]$_1$Fis	[29] e^2	[13] d^1	[49] cis^3	[–7] e	[38] a^2
	+41 +28		–14	+4	+2	–47	±0	–31	–31	+12
13:23	c^1 – b^1	–13	[10] gis	[36] fis^2	[3]$_1$H	[33] f^2	[16] e^1	[56] d^3	[–7] d	[43] a^2
	–31 –27		–49	+42	+2	+4	+5	+17	±0	–34
14:25	c^1 – b^1	+4	[11] gis	[39] f^2	[3]$_1$A	[36] e^2	[17] es^1	[61] cis^3	[–8] d	[47] a^2
	–12 +41		–49	+29	±0	–49	–2	–27	–31	+2
15:26	c^1 – a^1	–47	[11] g	[41] f^2	[4] Des	[37] e^2	[19] e^1	[63] des^3	[–7] H	[48] as^2
	±0 +30		+41	–10	+2	–29	–2	–20	–14	+38
16:29	c^1 – b^1	+30	[13] as	[45] fis^2	[3]$_1$G	[42] f^2	[19] es^1	[71] d^3	[–10] e	[55] a^2
	+5 –12		+41	–34	±0	+12	–29	+28	+4	–31
17:30	c^1 – b^1	–17	[13] g	[47] fis^2	[4]$_1$H	[43] e^2	[21] e^1	[73] cis^3	[–9] cis	[56] a^2
	+5 +45		–31	+2	+2	–10	–14	–2	–49	–41
17:31	c^1 – b^1	+40	[14] a	[48] fis^2	[3]$_1$Fis	[45] f^2	[20] dis^1	[76] d^3	[–11] f	[59] ais^2

große Septim

(1051 – 1149 Cent)

Prop.	Tonhöhen	Größe	h−t	h+t	2t−h	2h−t	3t−h	3h−t	3t−2h	3h−2t
	−31 +41		+2	−14	±0	−2	±0	±0	−14	−27
7:13	c^1 – b^1	−28	[6] a	[20] fis^2	[1]$_1$D	[19] f^2	[8] d^1	[32] d^3	[−5] fis	[25] ais^2
	±0 −12		−31	+28	±0	−49	+4	−49	+2	+30
8:15	c^1 – h^1	−12	[7] b	[23] ges^2	[1]$_1$C	[22] fis^2	[9] d^1	[37] dis^3	[−6] g	[29] b^2
	+4 +5		±0	+41	±0	−27	−14	−29	−31	−47
9:17	c^1 – h^1	+1	[8] b	[26] ges^2	[1]$_2$B♭	[25] fis^2	[10] d^1	[42] es^3	[−7] as	[33] h^2
	−14 −2		+4	+30	±0	−31	−49	−34	±0	−49
10:19	c^1 – h^1	+12	[9] b	[29] ges^2	[1]$_2$As	[28] ges^2	[11] d^1	[47] es^3	[−8] as	[37] h^2
	−49 −29		−14	±0	±0	+45	+2	+41	+4	+29
11:21	c^1 – h^1	+20	[10] ais	[32] fis^2	[1]$_2$Fis	[31] f^2	[12] cis^1	[52] d^3	[−9] gis	[41] ais^2
	+2 +28		−49	−45	±0	+5	+41	−1	−14	−10
12:23	c^1 – h^1	+26	[11] h	[35] g^2	[1]$_2$F	[34] ges^2	[13] des^1	[57] es^3	[−10] a	[45] h^2
	+41 +2		−49	−49	±0	−45	−12	−41	+4	+28
13:24	c^1 – h^1	+39	[11] ais	[37] g^2	[2]$_1$E	[35] fis^2	[15] dis^1	[59] dis^3	[−9] fis	[46] b^2
	+41 −27		+2	−2	±0	−49	−31	+45	−49	+38
13:25	c^1 – c^2	+32	[12] h	[38] g^2	[1]$_2$E	[37] g^2	[14] d^1	[62] dis^3	[−11] ais	[49] h^2
	−31 +6		+41	+29	±0	−14	−12	−21	+2	−26
14:27	c^1 – h^1	+37	[13] b	[41] fis^2	[1]$_2$D	[40] fis^2	[15] cis^1	[67] dis^3	[−12] a	[53] h^2
	−12 −31		+41	+12	±0	+29	+5	+30	−49	+6
15:28	c^1 – h^1	−19	[13] a	[43] ges^2	[2]$_1$Des	[41] f^2	[17] d^1	[69] d^3	[−11] g	[54] b^2
	−12 +30		−31	−49	±0	+12	±0	+4	+41	−1
15:29	c^1 – h^1	+42	[14] h	[44] g^2	[1]$_2$Cis	[43] fis^2	[16] cis^1	[72] dis^3	[−13] a	[57] h^2
	±0 +45		−12	−34	±0	+28	+5	+20	−31	+17
16:31	c^1 – h^1	+45	[15] h	[47] g^2	[1]$_2$C	[46] ges^2	[17] des^1	[77] es^3	[−14] b	[61] h^2
	+5 ±0		−12	+38	±0	−34	−2	−35	+41	+45
17:32	c^1 – h^1	−5	[15] ais	[49] fis^2	[2]$_2$H	[47] fis^2	[19] d^1	[79] dis^3	[−13] g	[62] ais^2

Klangbeispiele

❶
Ausschnitte aus:
Tristan Murail "Treize couleurs du soleil couchant" (1978)
Gérard Grisey "Vortex temporum" ‹*Wirbel der Zeit*› (1995)
Hugues Dufourt "Les Hivers/Le Déluge" (2001)
Beispiele für 'spektrales Komponieren'

❷
Ausschnitt aus:
Gunnar Geisse "per sona", letzter Abschnitt (2003/04)
als Beispiel für die Synthese von 'Rauschen' durch Addition von Frequenzen

❸
Ausschnitte aus:
James Tenney "Septet" (1981/2000)
als Beispiel für das Komponieren in Naturtonstimmung
Gunnar Geisse "MEtA" (1994)
als Beispiel für das Komponieren mit Obertönen

❹
Ausschnitte aus:
Gunnar Geisse "Yggdrasil IV", Anfang (1995-97)
als Beispiel für äquidistante Achteltönigkeit
James Tenney "Water on the Mountain... Fire in Heaven" (1985)
als Beispiel für äquidistante Zwölfteltönigkeit
Gunnar Geisse "V(∃)", Anfang - Mitte (1998)
als Beispiel für äquidistante 7-Cent-Tonhöhenschritte

❺
Ausschnitte aus:
Gunnar Geisse "Λ(∀)(Lambdoma)" (1996/97)
als Beispiel für die Partialtonmatrix
Gunnar Geisse "grattager g-eis-es-e", Mittelteil (2004/05)
als Beispiel für das Komponieren mit komplexen Partialtönen

❻
ProTools Session f_1 = 400 Hz & f_2 = 200 - 800 Hz
als Beispiel für die Kombinationstonbildung

❼
Ausschnitte aus:
Gunnar Geisse "grattager g-eis-es-e", Anfang (2004/05)
als Beispiel für die Simulation von Kombinationstönen
Gunnar Geisse "grattager g-eis-es-e", Ende (2004/05)
als Beispiel für die Verbindung von Kombinationstönen und Partialtönen